Digitized by Google

Math. P. 145

BIBLIOTECA
REGIA
MONACENSIS.

Math. P. 145 in 4

Digitized by Google

Digitized by Google

Lehrbuch

der

deſcriptiven Geometrie

von

Dr. Bernhard Gugler,

Profeſſor an der K. polytechniſchen Schule und der K. Kreis-Gewerbſchule zu Nürnberg.

Mit 11 Kupfertafeln.

Nürnberg,
bei Johann Leonhard Schrag.
1841.

Digitized by Google

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Digitized by Google

Seinen

frühesten Lehrern in der Mathematik,

den

hochwohlgeborenen Herren

Dr. Frd. Bened. Wilh. Hermann,

K. B. Hofrath, Vorſtand des ſtatiſtiſchen Bureaus und Referent im K. Miniſterium des Innern, ord. Profeſſor der Staatswirthſchaft an der K. Ludwig-Maximilian-Univerſität zu München, Mitglied des oberſten Kirchen- und Schulrathes und der K. Akademie der Wiſſenſchaften, ꝛc.

und

Dr. Carl Georg Chr. v. Staudt,

ord. Profeſſor der Mathematik an der K. Friedrich-Alexanders-Univerſität zu Erlangen ꝛc.,

als

Zeichen innigſter Verehrung und Dankbarkeit

gewidmet

vom

Verfaſſer.

Digitized by Google

Digitized by Google

Vorrede.

Die Herausgabe eines neuen Lehrbuchs der deſcriptiven Geometrie bedarf wohl keiner Rechtfertigung. Der Verfaſſer des vorliegenden wurde von der Anſicht geleitet, daß die deſcriptive Geometrie möglichſt ſelbſtändig zu behandeln ſei und ſich auf keine weiteren als die elementaren Vorkenntniſſe zu ſtützen habe, namentlich alſo analytiſche Geometrie nicht vorausſetze, vielmehr dieſer coordinirt erſcheine. Mit dieſer Anſicht ſtehen die im Anhange gegebenen analytiſchen Beweiſe einiger Lehrſätze nicht im Widerſpruch; denn dieſe Sätze ſind nur als Beigabe zu betrachten und gehören der deſcriptiven Geometrie nicht weſentlich an, da auf dieſelben keine Conſtructionen gegründet werden. Die letztere Bemerkung gilt zugleich für jene Stelle des Buches (§. 237), wo mehrere Haupteigenſchaften der Flächen zweiter Ordnung ohne Beweis aufgeführt ſind, und für einige Anmerkungen unter dem Texte. Dagegen ſind ſolche Sätze, auf denen die graphiſche Auflöſung einer Aufgabe beruht, immer bewieſen, und zwar durch die Mittel der deſcriptiven Geometrie ſelbſt oder der Elementargeometrie.

Von den franzöſiſchen Lehrbüchern, welche in mehrfacher Hinſicht unſere beſten Muſter ſind, weicht das gegenwärtige außer der ſchon erwähnten Umgehung analytiſch-geometriſcher Vorkenntniſſe noch in zwei andern weſentlichen Puncten ab, nämlich in der Anordnung und Vertheilung des Lehrſtoffs und in der Behandlung des Abſchnittes über die gerade Linie und Ebene. In der erſten Beziehung iſt der Verfaſſer bemüht geweſen, durch conſequentere Zuſammenſtellung des Zuſammengehörigen und durch Zerlegen

Digitized by Google

einer verwickelten Aufgabe in mehrere einzelne, deren eine die andere vorausſetzt, das Ganze überſichtlicher zu machen und in mehr wiſſenſchaftliche Form zu bringen. In der zweiten Beziehung iſt mehr gegeben, als in den franzöſiſchen Büchern. Dieſe legen den Unterſuchungen über krumme Flächen bei weitem die größte Wichtigkeit bei, und betrachten die Aufgaben über Ebene und Gerade nur als Mittel zum Zweck, weshalb außer den Fundamentalaufgaben nur ſolche ſich aufgenommen finden, welche zur Auflöſung ſpäterer, auf krumme Flächen bezüglicher Aufgaben unumgänglich nothwendig ſind. Aber abgeſehen davon, daß eine gründliche und möglichſt allgemeine Behandlung der krummen Flächen eine ausgedehntere Bekanntſchaft mit den zwiſchen Geraden und Ebenen ſtattfindenden Beziehungen vorausſetzt, verdient der den letzteren gewidmete Abſchnitt ſchon um ſeiner ſelbſt willen mehr Berückſichtigung, indem er, als in ſich geſchloſſenes Ganzes, dem Abſchnitte über krumme Flächen ſelbſtändig gegenüberſteht. Ein weiterer und faſt noch wichtigerer Grund für eine umfaſſendere Bearbeitung desſelben iſt der, daß gerade durch die Beſchäftigung mit der Geraden und der Ebene der Lernende am beſten das Weſen der deſcriptiven Geometrie erfaßt, und ſich gewöhnt, jede Aufgabe in den verſchiedenen Modificationen, welche ſich bei veränderter Lage der gegebenen Größen herausſtellen, zu verfolgen, was bei krummen Flächen in der Regel weit mehr Schwierigkeit hat.

Zugleich iſt die Betrachtung der Geraden und Ebene das wirkſamſte Mittel, die *innere Anſchauung* des Schülers zu bilden, worauf in der deſcriptiven Geometrie Alles ankommt. Weſſen Anſchauung im Anfange gehörig geübt wurde, dem wird es leicht, dem Lehrer ſpäter auch bei ſolchen Entwickelungen zu folgen, die ſich auf keine dem äußern Auge vorgelegte Figur beziehen, ſondern lediglich an die Imagination ſich wenden. Dieſe unerläßliche Ausbildung der geometriſchen Anſchauung wird übrigens nie zu Stande kommen, wenn man mit Demonſtrationen an

Digitized by Google

körperlichen Modellen beginnt; denn wem ſich eine einfache Combination von Raumgrößen durchaus nicht ohne Modell vor das geiſtige Auge führen laſſen ſollte, der dürfte überhaupt zum Studium der deſcriptiven Geometrie nicht befähigt ſein; verwickelte Combinationen aber laſſen ſich entweder im Modell gar nicht mehr geben, oder daſſelbe verliert durch unweſentliches Beiwerk (Stützen, Verbindungsſtäbe ꝛc.) alle Überſichtlichkeit. Allerdings koſtet dem Lehrer, welcher auf die Benützung von Modellen von vornherein verzichtet, der Anfang ſeines Unterrichts beträchtlich größere Mühe, und er wird nur langſam vorwärts gehen können; aber die Mühe lohnt ſich in ihren Früchten, und der Verluſt an Zeit iſt nur ein ſcheinbarer, weil er in der Folge mehr als erſetzt wird. Es giebt in der That nur wenige Schüler, welche ſolchen Bemühungen gänzlich unzugänglich ſind; wenigſtens hat dem Verfaſſer eine ſechsjährige Erfahrung gezeigt, daß auch mittelmäßige Köpfe ſich nach einiger Zeit wohl zurecht finden. Im Nothfalle bieten die Wände des Lehrzimmers, die Kanten oder Flächen der Bank, ein Bleiſtift oder Lineal, ein Heft oder eine Zeichnungsmappe ꝛc. Hülfsmittel genug, um der noch ſchwachen Imagination des Anfängers unter die Arme zu greifen, ohne es ihr gar zu bequem zu machen. Hat aber der Schüler das, was ihm gezeigt werden ſoll, innerlich klar geſehen, ſo möge er ſich nachträglich ein Modell ſelbſt conſtruiren, gleichſam als Probe der richtigen Anſchauung, was ihm im Falle des Gelingens immer eine anregende Satisfaction gewährt.

Schlüßlich findet der Verfaſſer für nöthig, die Wahl des Namens *Grundſchnitt* zu rechtfertigen, welchen er für die von Andern mit *Projectionsaxe* oder *Baſis* bezeichnete Linie gebraucht, und namentlich ſich gegen den Verdacht zu verwahren, als fände er Gelen an einem neueingeführten Namen. Das Mißliche und Störende abweichender Benennungen für eine und dieſelbe Sache wohl erkennend und erwägend, konnte er ſich doch zu keinem der oben erwähnten Worte entſchließen. Gewiß

wird ein großer Theil des mathematiſchen Publicums ihm darin beipflichten, daß der Name Projectionsaxe (gebildet nach der Analogie von Coordinatenaxe) außer ſeiner unbequemen Länge auch an ſich ungeeignet iſt; die darunter verſtandene Linie hat mit den Projectionen gar nichts unmittelbar zu thun, ſondern nur mit den Projectionsebenen, und ſteht zu jenen keineswegs in ſolcher Beziehung, wie die Coordinatenaxen der analytiſchen Geometrie zu den (auf ihnen gemeſſenen) Coordinaten. Die Abkürzung in Axe geht nicht an, weil man auch von den Axen der Curven und Flächen zu ſprechen hat und ſtete Verwechſelungen fürchten müßte. Aus dem gleichen Grunde kann Baſis hier nicht gebraucht werden, wo man oft genug von der Baſis eines Dreiecks, einer Pyramide ꝛc. handelt. Die Benennung Grundebenen für Projectionsebenen iſt allgemein gebilligt; hiernach ſcheint ſich für deren Schnittlinie der Name Grundſchnitt ganz ungeſucht darzubieten, und nur die einzige Einwendung ließe ſich etwa dagegen erheben, daß das Wort Grundſchnitt bereits anderwärts für das franzöſiſche trace gebraucht worden iſt, wofür der Verfaſſer (mit vielen Andern) Spur ſagt.

Die Erwägung, daß ein Lehrbuch der deſcriptiven Geometrie in Rückſicht auf Klarheit der Darſtellung und beſtimmte Kürze des Ausdrucks eine weit ſchwierigere Aufgabe zu löſen habe, als jedes andere mathematiſche Lehrbuch, darf bei jedem competenten Beurtheiler vorausgeſetzt werden.

Der Verfaſſer.

Digitized by Google

Inhalt.

Erſter Abſchnitt.

Die gerade Linie, die Ebene, und die von ihnen begrenzten Figuren.

Erſtes Kapitel.

Seite

§§. 1. 2. Einleitung 1

§§. 3—19. Von der Darſtellung des Puncts, der geraden Linie und Ebene 4

Zweites Kapitel.

Lehrſätze und Aufgaben über gerade Linien und Ebenen.

§§. 20—28. (Fundamentalſätze) 12

§§. 29—59. (Aufgaben, welche ſich auf die Lage gerader Linien und Ebenen beziehen) 15

§§. 60—68. (Beſtimmung gegenſeitiger Entfernungen zwiſchen Puncten, Geraden und Ebenen) . . 30

§§. 69—77. (Über die Grund-Neigungen gerader Linien und Ebenen) 37

§§. 78—88. (Über die Winkel zwiſchen gegebenen Linien und Ebenen) 47

Drittes Kapitel.

Über Raumecke.

§§. 89—104 54

§§. 92—98. Aufgaben über das Dreikant . . . 56

Viertes Kapitel.

Veränderung des Grundſyſtems.

§§. 105—116 65

§§. 106. 107. Parallele Verrückung einer Grundebene . 65

Digitized by Google

Seite

§§. 108—112. Einführung einer neuen $\left\{ {P \atop H} \right\}$-Ebene, welche der urſprünglichen nicht parallel iſt 67
§§. 113. 114. Parallele Verrückung beider Grundebenen . 72
§. 115. Drehung des Grundſyſtems um den Grundſchnitt 74
§. 116. Übergang von einem Grundſyſtem auf ein beliebig gegebenes neues 75

Fünftes Kapitel.

Polygone und Polyeder.

§§. 117—127. A.) Polygon-Projectionen . . . 76
§§. 128—157. B.) Polyeder-Projectionen . . . 84
Reguläre Polyeder 92
§§. 158—165. C.) Schnitte der Polyeder durch Ebenen . 111
§§. 166—172. D.) Schnitte der Polyeder unter ſich . 117

Zweiter Abſchnitt.

Krumme Linien und krumme Flächen.

Erſtes Kapitel.

Von krummen Linien.

§§. 173—213 129
§§. 176—206. A.) Über ebene Curven . . . 132
Tangenten. Normalen 133
Aſymptoten 137
Krümmungshalbmeſſer 138
Beſondere Puncte 141
Rectification 143
Evolution 144
Umhüllung 147
Linien zweiter Ordnung 149
Projectionen ebener Curven 163
Kreisprojection 166
§§. 207. B.) Über gewundene Curven und ihre Projectionen 173
Schraubenlinien 174

Zweites Kapitel.

Erzeugung und graphiſche Darſtellung krummer Flächen.

	Seite
§§. 214—268	180
§§. 215—218. Cylinderflächen	181
§§. 219—222. Kegelflächen	184
§§. 223—234. Drehungsflächen	188
§§. 235—239. Rückungsflächen	201
Flächen zweiter Ordnung	202
§§. 240—244. Umhüllungsflächen	209
Umhüllte Ebenen	209
Umhüllte Kugeln	210
Umhüllte Cylinder	212
Umhüllte Kegel	213
§§. 245—268. Regelflächen	213
A.) Entwickelbare Flächen	214
B.) Windſchiefe Flächen	221

Drittes Kapitel.

Berührung krummer Flächen durch gerade Linien und Ebenen.

§§. 269—331	251
§§. 272—291. A.) Berührungsebenen bei gegebenem Berührungspuncte	255
Berührungsebenen an Drehungsflächen	255
" " entwickelbaren Flächen . . .	259
" " windſchiefen Flächen . . .	262
" " Umhüllungsflächen . . .	274
§§. 292—303. B.) Berührungsebenen, parallel mit einer gegebenen Geraden	277
§§. 304—312. C.) Berührungsebenen, welche durch einen außerhalb der Fläche gegebenen Punct gehen .	288
§§. 313—318. D.) Berührungsebenen, welche durch eine gegebene Gerade gehen	293
§§. 319—323. E.) Berührungsebenen, parallel mit einer gegebenen Ebene	300
§§. 324—331. F.) Gemeinſchaftliche Berührungsebenen mehrerer Flächen	304

Digitized by Google

Viertes Kapitel.

Schnitte krummer Flächen durch Ebenen und gerade Linien.

§§. 332—352 311

§§. 336—338. Schnitte der Drehungsflächen . . 312

§§. 339—348. „ „ Regelflächen . . . 315

§§. 349—351. „ „ Rückungsflächen . . 331

§. 352. (Schnitte krummer Flächen durch gebrochene) . 337

Fünftes Kapitel.

Schnitte krummer Flächen durch krumme Flächen und krumme Linien.

§§. 353—380 338

§§. 358—363. Schnitt zweier Regelflächen . . 340

§§. 364—371. „ einer Drehungsfläche und einer Regelfläche 348

§§. 372—376. „ zweier Drehungsflächen . . 358

§§. 377—380. „ zweier Mäntel einer und derselben Fläche 364

Anhang.

I—V. (Lehrſätze) 377

VI. Stereographiſche Projection 387

Digitized by Google

Erſter Abſchnitt.

Die gerade Linie, die Ebene, und die von ihnen begrenzten Figuren.

Digitized by Google

Digitized by Google

Erſter Abſchnitt.

Erſtes Kapitel.

Einleitung.

§. 1.

Denkt man ſich eine unbegrenzte Ebene G, und außerhalb derſelben entweder einen feſten Punct C oder eine unveränderliche, nicht mit ihr parallele Linie L, ſo kann ein beliebig im Raume angenommener Punct A auf dieſe Ebene bezogen werden mittels einer durch ihn gelegten Geraden M, welche zugleich entweder durch C geht, oder mit L parallel läuft. In beiden Fällen heißt der Punct a, in welchem die Ebene von der Geraden M getroffen wird, die Projection des Punctes A; G die Grundebene oder Projectionsebene; M der Projectionsſtrahl oder die projicirende Linie.

Die Projection eines Syſtems von Puncten iſt der Inbegriff der gleichartigen Projectionen aller einzelnen Puncte, und kann als eine Abbildung dieſes Syſtems auf die Grundebene angeſehen werden. Sie iſt eine Central-projection, wenn die projicirenden Linien ſämmtlich von einem und demſelben Puncte C (dem Projections-Centrum) ausgehen; eine Parallel-Projection, wenn die projicirenden Linien unter ſich parallel laufen. *) Sind im letztern Falle dieſe Linien zugleich ſenkrecht zur Grundebene, ſo heißt die Projection orthogonal.

*) Da parallele Linien als ſolche betrachtet werden können, welche ſich in einem unendlich fernen Puncte ſchneiden, ſo kann das Parallel-Projiciren als beſonderer Fall des Central-Projicirens gelten.

Digitized by Google

Soll ein Gegenſtand auf einer Ebene perſpectiviſch abgebildet werden, d. h. ſo, wie er aus einem gewiſſen Standpuncte dem Auge wirklich erſcheint, ſo kann dieß nur durch eine Centralprojection geſchehen, wobei man das Centrum im Auge annimmt. Gleichwohl zieht man es für techniſche Zwecke allgemein vor, einen darzuſtellenden Gegenſtand in ſeiner orthogonalen Projection oder als geometriſches Bild zu geben, weil ſich daraus leichter und einfacher auf ſeine wahren Dimenſionen und übrigen geometriſchen Eigenſchaften ſchließen läßt.

Eine gegebene geometriſche Größe auf eine gegebene Ebene in orthogonale Projection zu legen, macht einen Theil der Aufgabe aus, mit der ſich die deſcriptive Geometrie (darſtellende Geometrie, beſchreibende Geometrie) beſchäftigt. Außerdem aber zeigt dieſer Zweig der Mathematik, wie man aus den gegebenen Projectionen verſchiedener Raumgrößen die Beziehungen auffindet, in denen dieſe Größen ſelbſt unter ſich ſtehen, und lehrt die Aufgaben, auf welche die gegenſeitige Stellung von Puncten, Linien und Flächen im Raume führt, durch Zeichnungsoperationen löſen, welche in einer und derſelben Ebene ausgeführt werden können.

Da die deſcriptive Geometrie ſich der orthogonalen Projectionsmethode faſt ausſchließlich bedient, ſo ſoll künftig immer dieſe gemeint ſein, wenn das Wort Projection ohne nähere Beſtimmung ſteht.

§. 2.

Von mathematiſchen Vorkenntniſſen verlangt die deſcriptive Geometrie blos Bekanntſchaft mit den weſentlichſten Lehren der elementaren Geometrie (Planimetrie und Stereometrie).

Behufs künftiger Citate ſollen diejenigen ſtereometriſchen Sätze, auf welche man am häufigſten zurückweiſen muß, hier unter Nummern zuſammengeſtellt werden.

I. Eine Ebene wird von einer bewegten Geraden beſchrieben, wenn dieſe eine andere Gerade fortwährend

Digitized by Google

ſchneidet und zugleich mit einer gegebenen Richtung parallel bleibt; oder wenn ſie zwei parallele oder ſich ſchneidende Gerade beſtändig ſchneidet.

II. Eine Ebene iſt beſtimmt durch zwei parallele oder ſich ſchneidende Gerade, oder durch drei Puncte, die nicht in einerlei Richtung liegen.

III. Eine Ebene kann von einer Geraden nur in einem Puncte geſchnitten werden.

IV. Zwei Ebenen können ſich nur nach einer Geraden ſchneiden.

V. Gehen drei Ebenen nicht durch eine und dieſelbe Gerade, ſo bilden ſie drei geradlinige Durchſchnitte, welche alle entweder unter ſich parallel ſein oder in einem und demſelben Puncte zuſammenkommen müſſen.

VI. Eine Gerade liegt ganz in einer Ebene, wenn ſie zwei Puncte mit dieſer gemein hat; oder wenn ſie durch einen Punct der Ebene geht und zugleich einer in der Ebene gezogenen Geraden parallel iſt.

VII. Eine Gerade iſt ſenkrecht auf einer Ebene, d. h. auf allen Geraden, die man durch ihren Fußpunct in der Ebene ziehen kann, wenn ſie auf zwei ſolchen Geraden ſenkrecht ſteht.

VIII. Sind mehrere Gerade auf einer andern Geraden in demſelben Puncte ſenkrecht, ſo liegen ſie in einer Ebene. (Oder: wird ein rechter Winkel um ſeinen einen Schenkel gedreht, ſo beſchreibt der andere Schenkel eine auf dem erſten ſenkrechte Ebene.)

IX. Auf einer Ebene iſt durch einen in oder außer ihr gegebenen Punct nur eine einzige Senkrechte möglich.

X. Fällt man aus einem und demſelben Puncte eine Senkrechte auf eine Ebene und eine zweite auf eine in der Ebene gezogene Gerade, ſo iſt die Verbindungslinie beider Fußpuncte ſenkrecht auf jener Geraden.

XI. Steht eine Gerade ſenkrecht auf einer Ebene, ſo ſind auf dieſer Ebene alle durch die Gerade gehenden Ebenen ſenkrecht.

Digitized by Google

XII. Die Schnittlinie zweier Ebenen, welche auf einer dritten Ebene ſenkrecht ſind, iſt ſenkrecht zu dieſer.

XIII. Schneiden zwei Ebenen ſich ſenkrecht, ſo iſt jede Gerade, welche man in der einen ſenkrecht zur Schnittlinie ziehen kann, ſenkrecht zur andern.

XIV. Zwei auf einerlei Ebene ſenkrechte Gerade ſind parallel.

XV. Iſt eine von zwei parallelen Geraden ſenkrecht auf einer Ebene, ſo iſt auch die andere ſenkrecht auf dieſer Ebene.

XVI. Iſt eine Gerade ſenkrecht auf zwei Ebenen, ſo ſind dieſe parallel.

XVII. Zwei parallele Ebenen werden von einer dritten nach Parallellinien geſchnitten.

XVIII. Eine Gerade iſt einer Ebene parallel, wenn ſie mit einer in der Ebene gezogenen Geraden parallel läuft.

XIX. Iſt eine Gerade zweien Ebenen parallel, ſo iſt ſie auch der Durchſchnittslinie derſelben parallel.

XX. Sind die Schenkel eines Winkels den Schenkeln eines andern parallel, ſo ſind die Winkel gleich und ihre Ebenen ſind parallel (oder können auch zu einer einzigen Ebene zuſammenfallen).

Von der Darſtellung des Puncts, der geraden Linie und Ebene.

§. 3.

Durch die Projection eines Puncts iſt eine Gerade (das projicirende Loth) gegeben, in welcher er liegt (§. 2, IX); der Punct ſelbſt aber iſt nicht beſtimmt, da er noch in jeder beliebigen Entfernung von der Grundebene angenommen werden kann. Jene Projection gehört demnach allen möglichen Puncten der projicirenden Linie gemeinſchaftlich an, d. h. ſie iſt die Projection dieſer Linie ſelbſt. Die Projection irgend einer andern (nicht zur Grundebene ſenkrechten) Geraden oder einer Curve wird man erhalten, wenn

Digitized by Google

man ihren Anfangspunct projicirt, die projicirende Linie (welche als ſolche immer ſenkrecht zur Grundebene, alſo parallel mit ihrer urſprünglichen Lage bleiben muß) an der gegebenen Linie bis zum Endpuncte fortgleiten läßt und den Weg des Fußpunctes verfolgt. (Anfangs- und Endpunct können dabei auch in unendlicher Entfernung gedacht werden). Iſt nun die gegebene Linie gerade, ſo beſchreibt das bewegte Projectionsloth eine Ebene (§. 2, I); daher müſſen die verſchiedenen Lagen ihres Fußpunctes ſämmtlich in der Geraden (§. 2, IV.) enthalten ſein, nach welcher dieſe projicirende Ebene von der Grundebene geſchnitten wird; woraus unmittelbar folgt, daß die Projection einer Geraden ihrer Richtung nach gegeben iſt, wenn man die Projectionen von zweien ihrer Puncte kennt, — und auch ihrer Größe nach, wenn dieſe Puncte die Endpuncte ſind. Iſt die gegebene Linie krumm, ſo kann das Projectionsloth in beſondern Fällen ebenfalls eine Ebene beſchreiben; im Allgemeinen aber wird es eine krumme Fläche erzeugen, welche der projicirende Cylinder *) heißt und von der Grundebene nach einer krummen Linie geſchnitten wird.

§. 4.

Gleichwie ein Punct durch ſeine Projection noch nicht beſtimmt iſt, ſo reicht auch zur Beſtimmung einer geraden oder krummen Linie eine Projection nicht hin; denn durch dieſe iſt blos die projicirende Ebene oder der projicirende Cylinder gegeben, und ſie entſpricht allen möglichen Geraden oder Curven, die man in dieſer Ebene — oder allen krummen Linien, die man auf dieſem Cylinder ziehen kann. Kennt man aber noch die Projection eines Puncts oder einer Linie auf einer zweiten Ebene, die mit der urſprünglichen Grundebene nicht parallel iſt, ſo beſtimmt ſich der Punct als Durchſchnitt zweier Projectionslothe, die Gerade als Durchſchnitt

*) Die höhere Geometrie nimmt die Namen Cylinder und Kegel in weiterer Bedeutung, als die elementare (ſ. II. Abſchnitt).

Digitized by Google

zweier Ebenen, die Curve als Durchſchnitt zweier Cylinderflächen oder einer Cylinderfläche und einer Ebene. Die descriptive Geometrie nimmt deßhalb immer zwei (unbegrenzte) Grundebenen an, und zwar rechtwinkelig verbunden, weil ſo die vorkommenden Conſtructionen am einfachſten werden. Man bezeichnet die eine als horizontale, die andere als verticale (obgleich ſie nicht nothwendig horizontal und vertical liegen müſſen), und unterſcheidet durch dieſe Beiworte auch die auf ihnen gezeichneten Projectionen. Unter {horizontal / vertical}-projicirender Linie oder Ebene hat man diejenige zu verſtehen, mittels deren man die {Horizontal / Vertical}-Projection eines Puncts oder einer Linie erhält. Die Durchſchnittslinie der Grundebenen heißt Grundſchnitt (Projectionsaxe, Baſis). Beide Grundebenen in Verbindung bilden das Grundſyſtem.

Die Grundebenen bringen den Raum in vier Abtheilungen, und jede Ebene ſcheidet die andere in zwei Theile, ſo daß man eine vordere und hintere Horizontalebene und eine obere und untere Verticalebene hat. *)

§. 5.

Um mittels der Grundebenen die Lage einer unbegrenzten Ebene anzuzeigen, kann man nicht, wie bei der Linie, ihre ſämmtlichen Puncte projiciren, indem man dadurch in allen Fällen die Grundebenen ſelbſt als Projectionen der Ebene erhalten würde. Man hat für das Einfachſte befunden, eine Ebene durch Angabe der beiden Geraden zu beſtimmen, nach denen ſie die Grundebenen ſchneidet, und dieſen Geraden den Namen Spuren (Tracen, Riſſe) gegeben. Die Spuren einer Ebene müſſen ſich immer im Grundſchnitte begegnen oder beide mit ihm parallel laufen (§. 2, V).

---

*) Die Bedeutung der in der Folge öfters gebrauchten Abkürzungen HE, VE, GE iſt augenfällig; GS = Grundſchnitt.

Digitized by Google

Spuren heißen auch die Durchſchnittspuncte einer Linie mit den Grundebenen, ſo wie die Curven, nach welchen eine krumme Fläche die Grundebenen ſchneidet.

§. 6.

Soll eine geometriſche Aufgabe mittels der Projectionsmethode gelöſt werden, ſo ſind die nöthigen Conſtructionen zum Theil auf der Horizontalebene, zum Theil auf der Verticalebene auszuführen. Damit dieß mit Bequemlichkeit und Genauigkeit geſchehen könne, muß man die beiden Grundebenen durch eine einzige repräſentiren.

Denkt man ſich in dieſer Abſicht die Verticalebene um den Grundſchnitt ſo weit gedreht, daß ihr oberer Theil mit der vordern Horizontalebene einen flachen Winkel bildet, ſo haben ſich in der That beide Grundebenen zu einer vereinigt, welche man die Zeichnungsebene nennt. Der urſprüngliche Grundſchnitt muß aber in dieſer Zeichnungsebene immer angegeben ſein. Was dieſſeits des Grundſchnitts liegt, iſt zugleich vordere Horizontal- und untere Verticalebene; jenſeits liegt die obere Vertical- und hintere Horizontalebene. Zur Vermeidung der hieraus entſtehenden Zweideutigkeiten in den Zeichnungen denkt man ſich die untere verticale Ebene durch die vordere horizontale verdeckt und ebenſo die hintere horizontale durch die obere verticale, und zeichnet die auf den verdeckten Theilen gelegenen Projectionen und Spuren punctirt. Sind aber die Projectionen ſelbſt Puncte, ſo kann man blos durch die Bezeichnung andeuten, welchen Ebenen ſie angehören. Ein im Raume gelegener Punct ſoll hier immer durch einen Buchſtaben des großen Alphabets benannt ſein, ſo jedoch, daß der an der Verticalprojection ſtehende einen Accent erhält. Sind x und x′ die Projectionen eines Puncts, ſo iſt unter X oder (x, x′) immer dieſer Punct im Raume zu verſtehen. Auf gleiche Weiſe zeigt XY oder (xy, x′y′) diejenige Linie im Raume an, deren Projectionen xy und x′y′ heißen.

Man darf übrigens niemals vergeſſen, daß das Umlegen einer Grundebene in die andere nur die Erleichterung

Digitized by Google

der Zeichnungsoperationen bezweckt, und daß man, um ſich über die Bedeutung dieſer Operationen Rechenſchaft zu geben, die Grundebenen immer in rechtwinkeliger Verbindung denken muß. So beziehen ſich auch in Zukunft die Betrachtungen, durch welche man zur Auflöſung einer vorgelegten Aufgabe zu gelangen ſucht, überall auf den urſprünglichen Zuſtand des Grundſyſtems. Wenn daher z. B. von einer Geraden die Rede ſein wird, welche einen in der Horizontalebene gelegenen Punct mit einem Puncte der Verticalebene verbindet, ſo bedeutet dieß nicht die Linie, welche in der Zeichnungsebene durch beide Puncte gezogen werden kann, ſondern die Linie im Raume, wie ſie vor dem Zurücklegen der Verticalebene ſich darſtellt. Oder wenn PO, OP′ die Spuren einer Ebene ſind, ſo hat man unter ∠ POP′ nicht denjenigen Winkel zu verſtehen, der durch beide Spuren in der Zeichnungsebene gebildet wird.

§. 7.

Von zwei beliebig auf den Grundebenen angenommenen Puncten läßt ſich nicht vorausſetzen, daß ſie einem Puncte im Raume als Projectionen zugehören; denn die aus ihnen auf den entſprechenden Grundebenen errichteten Senkrechten werden ſich in vielen Fällen nicht ſchneiden. Es muß daher zwiſchen den Projectionen eines Punctes eine gewiſſe Beziehung ſtatt finden, und dieſe ergiebt ſich aus folgender Betrachtung. Legt man durch die von einem Puncte ausgehenden Projectionslothe eine Ebene, ſo muß dieſe auf jeder Grundebene ſenkrecht ſtehen (§. 2, XI), alſo auch auf dem Grundſchnitt (§. 2, XII). Die Spuren dieſer Ebene, welche die Projectionen des Punctes enthalten, ſind demnach ebenfalls ſenkrecht zum Grundſchnitt und werden nach dem Zurücklegen der Verticalebene einen flachen Winkel bilden oder aufeinander fallen. Daraus folgt, daß die Richtung der Senkrechten, die man in der Zeichnungsebene aus der einen Projection eines Punctes auf den Grundſchnitt fällt, auch durch die andere Projection gehen muß.

Digitized by Google

Da bei der urſprünglichen Stellung der Grundebenen die oben erwähnten Spuren mit den beiden Projectionslothen ein Rechteck einſchließen, ſo ſieht man, daß die Verticalprojection des Punctes vom Grundſchnitt eben ſo weit entfernt iſt, wie der Punct ſelbſt von der Horizontalebene. Man nennt dieſe Entfernung ſeine *Horizontaldiſtanz*. Die *Verticaldiſtanz* iſt gleich der Entfernung der Horizontalprojection vom Grundſchnitt.

§. 8.

Liegt ein Punct in der $\left\{\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{V}}\right\}$-Ebene, ſo fällt er mit ſeiner $\left\{\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{V}}\right\}$-Projection zuſammen; ſeine $\left\{\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{H}}\right\}$-Projection fällt in den Grundſchnitt (denn die $\left\{\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{V}}\right\}$-Diſtanz iſt = 0).

Ein im Grundſchnitt gelegener Punct fällt mit ſeinen beiden Projectionen zuſammen. Geht daher eine Linie durch den Grundſchnitt, ſo müſſen ihre Projectionen im Grundſchnitt zuſammentreffen.

§. 9.

Eine Gerade *) in der $\left\{\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{V}}\right\}$-Ebene iſt ihre eigene $\left\{\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{V}}\right\}$-Projection; ihre $\left\{\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{H}}\right\}$-Projection fällt in den Grundſchnitt. (§. 8.)

Liegt die Gerade ſelbſt im Grundſchnitt, ſo fallen ihre beiden Projectionen mit ihr zuſammen.

§. 10.

Iſt eine Gerade ſenkrecht zur $\left\{\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{V}}\right\}$-Ebene, ſo iſt ihre $\left\{\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{V}}\right\}$-Projection ein Punkt (§. 3). Die ſämmtlichen Punkte der $\left\{\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{H}}\right\}$-Projection müſſen in der Senkrechten liegen, welche man aus der $\left\{\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{V}}\right\}$-Projection auf den Grundſchnitt fällt (§. 7). Dieſe Senkrechte iſt alſo ſelbſt die $\left\{\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{H}}\right\}$-Projection.

*) Hier und im Folgenden iſt jede Gerade immer als *unbegrenzt* zu denken, wenn es nicht ausdrücklich anders bemerkt wird.

Digitized by Google

§. 11.

Iſt eine Gerade parallel zur $\left\{\begin{matrix}H\\V\end{matrix}\right\}$-Ebene, ſo iſt ihre $\left\{\begin{matrix}V\\H\end{matrix}\right\}$-Projection parallel zum Grundſchnitt. Denn da zwei beliebige Puncte der Linie gleiche $\left\{\begin{matrix}H\\V\end{matrix}\right\}$-Diſtanz haben, ſo müſſen die $\left\{\begin{matrix}V\\H\end{matrix}\right\}$-Projectionen dieſer Puncte gleichweit vom Grundſchnitt abſtehen (§. 7).

Läuft demnach eine Gerade parallel mit beiden Grundebenen (oder mit dem Grundſchnitt), ſo ſind ihre beiden Projectionen dem Grundſchnitt parallel.

§. 12.

Liegt eine Gerade in einer zum Grundſchnitt ſenkrechten Ebene, ſo ſtehen ihre beiden Projectionen auf dem Grundſchnitt in einem und demſelben Puncte ſenkrecht, bilden alſo in der Zeichnungsebene eine einzige Linie. Die Gerade ſelbſt kann ſich nicht als Durchſchnitt zweier projicirender Ebenen ergeben, weil dieſe Ebenen hier in eine zuſammenfallen. Sie iſt daher nur dann beſtimmt, wenn noch weitere Angaben hinzukommen; z. B. wenn ihre Spuren gegeben ſind; oder die $\left\{\begin{matrix}H\\V\end{matrix}\right\}$-Diſtanzen, welche den $\left\{\begin{matrix}H\\V\end{matrix}\right\}$-Projectionen von zweien ihrer Puncte entſprechen; oder wenn man ihre Projection auf einer dritten Grundebene hat, welche zu keiner der urſprünglichen parallel iſt.

§. 13.

Im Allgemeinen kann man zwei in den Grundebenen beliebig gezogene Gerade als Projectionen einer Linie betrachten, weil die durch ſie geführten projicirenden Ebenen ſich immer ſchneiden werden. *) Nur wenn man die eine Projection ſenkrecht zum Grundſchnitt angenommen hat, iſt die andere nicht mehr ganz willkührlich. (§. 10, §. 12.)

*) Will man die Linie als eine begrenzte darſtellen, ſo hat man für die Projectionen der Grenzpuncte den in §. 7 enthaltenen Satz zu beachten.

Digitized by Google

§. 14.

Liegt eine Ebene parallel zum Grundſchnitt, ſo können ihre Spuren dieſen nicht treffen, müſſen alſo mit ihm parallel laufen.

Iſt dabei die Ebene zugleich parallel mit einer der Grundebenen, ſo hat ſie nur eine einzige Spur.

§. 15.

Die $\left\{\begin{matrix}H\\V\end{matrix}\right\}$-Spur einer zur $\left\{\begin{matrix}V\\H\end{matrix}\right\}$-Ebene ſenkrechten Ebene ſteht ſenkrecht auf dieſer (§. 2, XII), alſo auch auf dem Grundſchnitt.

Steht eine Ebene auf beiden Grundebenen (oder auf dem Grundſchnitt) ſenkrecht, ſo ſind beide Spuren ſenkrecht zum Grundſchnitt.

§. 16.

Geht eine Ebene durch den Grundſchnitt, ſo fallen ihre Spuren beide mit dieſem zuſammen, und zu ihrer Beſtimmung iſt noch eine Angabe nöthig. Gewöhnlich nimmt man eine dritte Grundebene zu Hülfe.

§. 17.

Zwei Gerade, die ſich im Grundſchnitte treffen oder beide mit ihm parallel laufen, kann man immer für Spuren einer Ebene nehmen, weil durch ein ſolches Linienpaar eine Ebene ſtets möglich und auch völlig beſtimmt iſt.

§. 18.

Man kann ſich leicht überzeugen, daß die in §§. 8—11, 14, 15 aufgeführten Sätze auch umgekehrt (indem man aus den Projectionen oder Spuren auf die Lage der Linien oder Ebenen ſelbſt ſchließt) Geltung haben. *)

---

*) Es iſt nöthig, daß der Anfänger dieſe umgekehrten Sätze für ſich ſtreng beweiſe.

§. 19.

Ein Punct oder eine Linie wird als gegeben betrachtet, wenn die Projectionen bekannt ſind; eine Ebene iſt gegeben, wenn man ihre Spuren kennt.

Zweites Kapitel.

Lehrſätze und Aufgaben über gerade Linien und Ebenen.

§. 20.

Fallen die Spuren einer Linie in die Spuren einer Ebene, ſo liegt die Linie ſelbſt in der Ebene (§. 2, VI).

Umgekehrt: Eine in einer Ebene gezogene Linie hat ihre Spuren in den gleichnamigen Spuren der Ebene.

§. 21.

Die gleichnamigen Spuren paralleler Ebenen ſind parallel (§. 2, XVII).

Umgekehrt: Haben zwei gegen den Grundſchnitt geneigte Ebenen parallele Spuren, ſo ſind ſie ſelbſt parallel (§. 2, XX). (Sind die Spuren zweier Ebenen dem Grundſchnitt parallel, ſo können zwar die Ebenen ſelbſt parallel ſein; ſie können ſich aber auch nach einer mit dem Grundſchnitt parallelen Geraden ſchneiden.)

§. 22.

Die gleichnamigen Projectionen paralleler Linien ſind parallel. Denn nimmt man in jeder der Linien einen beliebigen Punct an und fällt aus dieſen Puncten Lothe auf die $\left\{\frac{H}{V}\right\}$-Ebene, ſo ſind dieſe parallel (§. 2, XIV); daher ſind die durch ſie gehenden projicirenden Ebenen parallel (§. 2, XX); mithin auch deren Spuren.

Digitized by Google

Sind in beiden Grundebenen die Projectionen zweier Geraden parallel und nicht zum Grundſchnitte ſenkrecht, ſo müſſen die Geraden im Raume ſelbſt parallel ſein. Denn es ſind die gleichnamigen projicirenden Ebenen parallel (§. 2, XIV, XX); die Durchſchnitte der beiden Syſteme projicirender Ebenen ſind daher ſämmtlich unter ſich parallel (§. 2, XVII); unter dieſen Durchſchnitten befinden ſich aber die fraglichen Linien. (Sind die Projectionen ſenkrecht auf dem Grundſchnitt, ſo iſt ein Parallelſein der Linien im Raume möglich, aber nicht nothwendig.)

§. 23.

Zwei Linien, deren Projectionen ſich ſchneiden, treffen ſich nur dann, wenn die Verbindungslinie der Schnittpuncte gleichnamiger Projectionen ſenkrecht auf dem Grundſchnitt ſteht. Denn es iſt klar, daß nur in den genannten Schnittpuncten der gemeinſame Punct der wirklichen Linien projicirt ſein könnte; findet nun zwiſchen jenen Puncten die in §. 7 angegebene Beziehung nicht ſtatt, ſo kann ein ſolcher gemeinſamer Punct im Raume nicht exiſtiren.

Zwei Linien müſſen ſich nothwendig treffen, wenn die Verbindungslinie ꝛc.

§. 24.

Steht eine Linie ſenkrecht auf einer Ebene, ſo ſind ihre Projectionen ſenkrecht auf den gleichnamigen Spuren der Ebene. Denn es ſteht die $\left\{\begin{matrix}h\\v\end{matrix}\right\}$-Spur der Ebene ſenkrecht auf der durch die Linie gelegten $\left\{\begin{matrix}\text{horizontal}\\\text{vertical}\end{matrix}\right\}$-projicirenden Ebene (§. 2, XI. XII).

Sind die Projectionen einer Linie ſenkrecht auf den gleichnamigen Spuren einer gegen den Grundſchnitt geneigten Ebene, ſo iſt die Linie ſelbſt ſenkrecht auf der Ebene. Denn die beiden projicirenden Ebenen ſtehen auf den entſprechenden Spuren der Ebene ſenkrecht (§. 2, XIII), alſo auf der Ebene ſelbſt

Digitized by Google

(§. 2, XI); mithin ſteht auch ihre Durchſchnittslinie auf der Ebene ſenkrecht (§. 2, XII). (Iſt eine Ebene dem Grundſchnitt parallel, und man zieht in einer zum Grundſchnitt ſenkrechten Ebene eine beliebige Gerade, ſo ſind ihre Projectionen immer ſenkrecht auf den Spuren der erſtern Ebene (§§. 14, 12), obgleich die Gerade ſelbſt jede denkbare Neigung gegen die Ebene haben kann.)

§. 25.

Iſt eine begrenzte Linie in einem beliebigen Verhältniß getheilt, ſo wird ihre Projection durch die Projection des Theilungspunctes in demſelben Verhältniß getheilt. Denn die projicirenden Lothe aus den Endpuncten und dem Theilungspuncte ſind parallel, und die Elementargeometrie beweiſt, daß ein Syſtem von Parallelen alle hindurchgelegten Geraden nach einem und demſelben Verhältniſſe ſchneidet.

§. 26.

Iſt eine begrenzte Linie parallel zu einer Grundebene, ſo hat ihre Projection auf dieſer Ebene einerlei Länge mit ihr. Denn die Linie und ihre Projection ſind parallele Seiten in einem Rechteck, deſſen beide andere Seiten durch die aus den Endpuncten gefällten Projectionslothe gebildet werden.

§. 27.

Die Projection einer begrenzten Geraden kann nie größer ſein, als die Gerade ſelbſt. Denn zieht man durch den einen Endpunct der Geraden eine Parallele mit ihrer Projection, ſo iſt das zwiſchen die Projectionslothe beider Endpuncte fallende Stück derſelben der Projection gleich und ſtellt die Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks vor, deſſen Hypotenuſe die Gerade im Raume iſt.

Digitized by Google

§. 28.

Die Projection einer gebrochenen Linie, welche in einer zur Grundebene parallelen Ebene liegt, iſt der Linie ſelbſt congruent. Denn die einzelnen Stücke der Linie ſind ihren Projectionen gleich (§. 26) und parallel; mithin projicirt ſich auch jeder Winkel zwiſchen zwei ſolchen Stücken in der wahren Größe (§. 2, XX.)

Von der Wahrheit dieſes Satzes kann man ſich auch auf folgendem Wege überzeugen: Bewegt man die Ebene der Linie parallel mit ſich ſelbſt gegen die Grundebene hin, ſo daß jeder Punct der Linie in ſeinem Projectionslothe bleibt, ſo werden die H-Diſtanzen der einzelnen Puncte immer unter ſich gleich bleiben. Wird daher endlich für einen ſolchen Punct dieſe Diſtanz Null, ſo wird ſie auch für jeden andern Punct Null, d. h. fällt ein Punct der Linie in ſeine Projection, ſo geſchieht daſſelbe zugleich mit allen übrigen Puncten, oder die Linie und ihre Projection decken ſich.

Zuſ. I. Aus der letztern Betrachtung folgt noch, daß der obige Satz nicht nur für gebrochene, ſondern ebenſowohl für krumme Linien gilt.

Zuſ. II. Nimmt man auch die zweite Grundebene hinzu, ſo muß ſich auf dieſe die Linie als eine mit dem Grundſchnitt parallele Grade projiciren. Denn die Projectionen aller ihrer Puncte fallen in die Spur ihrer Ebene. (Vgl. §. 14.)

§. 29.

Aufgabe. Die Projectionen einer Geraden zu zeichnen, welche durch zwei gegebene Puncte (a, a′), (b, b′) geht.

Auflöſung. Verbinde die gleichnamigen Projectionen der Puncte, ſo ſind die erhaltenen Linien ab, a′b′ die verlangten Projectionen (§. 3.)

§. 30.

Aufg. Durch einen gegebenen Punct eine Parallele zu einer gegebenen Geraden zu legen.

Digitized by Google

Aufl. Ziehe durch die Projectionen des Punctes Parallelen mit den gleichnamigen Projectionen der Geraden. (§. 22.)

§. 31.

Aufg. Aus den Projectionen Ss, S′s′ einer Geraden ihre Spuren zu finden.

Fig. 1, 2. Aufl. Errichtet man aus den Puncten s, s′, in denen die gegebenen Projectionen dem Grundſchnitt begegnen, Senkrechte sS′, s′S auf dieſen, ſo ſind Ss, sS′ die Spuren der horizontalprojicirenden und Ss′, s′S′ die der verticalprojicirenden Ebene. Da die gegebene Linie beiden projicirenden Ebenen angehört, ſo muß ihre H-Spur in den H-Spuren sS und s′S beider Ebenen zugleich liegen (§. 20), kann alſo kein anderer Punct ſein, als der Durchſchnitt S dieſer Spuren. Ebenſo ergiebt ſich die V-Spur S′ der Linie als Durchſchnitt von S′s′ und sS′.

Zuſatz. Läuft eine der gegebenen Projectionen mit dem Grundſchnitt parallel, ſo findet man nur eine Spur, was mit §. 11 übereinſtimmt.

§. 32.

Aufg. Aus den Spuren S, S′ einer Geraden ihre Projectionen zu finden.

Fig. 1, 2. Aufl. Iſt S′s ⊥ GG, ſo ſind s und S die H-Projectionen zweier Puncte der Geraden (§. 8), alſo Ss die H-Projection der Geraden ſelbſt (§. 3). Auf ähnliche Weiſe erhält man ihre V-Projection S′s′.

§. 33.

Aufg. Eine Spur PO einer Ebene POP′ iſt gegeben und ein Punct P′ der andern Spur; man ſoll die andere Spur ſelbſt finden.

Aufl. Verbinde den gegebenen Punct P′ mit dem Puncte O, in welchem PO den Grundſchnitt trifft. Iſt PO parallel zum Grundſchnitt, ſo ziehe man durch P′ ebenfalls eine Parallele mit dem Grundſchnitt (§. 5.)

Digitized by Google

Zuſatz. Fällt O nicht mehr in das Zeichnungsblatt, ſo nehme man in OP einen Punct A willkührlich und zeichne die Projectionen der Linie AP′, welche in A und P ihre Spuren hat (§. 32), alſo in der Ebene POP′ liegt. Ferner wähle man in OP einen zweiten Punct (B, b′) (§. 8) und ziehe entweder durch ihn eine Parallele mit AP′ (§. 30) oder verbinde ihn mit einem beliebigen Puncte der AP′ (§§. 29, 7). Jene Parallele oder dieſe Verbindungslinie liegt in der Ebene POP′ (§. 2, VI); ihre mit P′ gleichnamige Spur iſt alſo ein zweiter Punct der geſuchten Spur dieſer Ebene.

§. 34.

Aufg. **Die Spuren einer Ebene zu zeichnen, welche durch eine gegebene Gerade beliebig geht.**

Aufl. Beſtimme die Spuren der Geraden (§. 31) und verbinde ſie mit einem beliebigen Puncte des Grundſchnitts.

Zuſatz I. Fällt eine der Linienſpuren, oder beide, über die Grenzen des Zeichnungsblattes hinaus, ſo führt eine ſpätere Aufgabe zum Ziel. Man legt nämlich durch zwei ſchicklich gewählte Puncte in der Linie und einen dritten Punct außer ihr eine Ebene (§. 47).

Zuſatz II. Hat die gegebene Gerade nur eine $\left\{ {V \atop H} \right\}$-Spur, d. h. iſt ſie parallel zur $\left\{ {H \atop V} \right\}$-Ebene, ſo iſt die $\left\{ {H \atop V} \right\}$-Spur jeder durch ſie gelegten Ebene parallel mit ihr, alſo auch mit ihrer $\left\{ {H \atop V} \right\}$-Projection.

§. 35.

Aufg. **Die Spuren einer Ebene zu zeichnen, welche durch einen gegebenen Punct beliebig geht.**

Aufl. Lege durch den gegebenen Punct eine beliebige Gerade und durch dieſe eine Ebene (§. 34).

§. 36.

Aufg. **Die Projectionen einer Geraden zu zeichnen, welche in einer gegebenen Ebene beliebig liegt.**

Digitized by Google

Aufl. Man nehme in jeder der gegebenen Spuren willkührlich einen Punct, betrachte beide Puncte als Spuren einer Geraden und ſuche ihre Projectionen (§. 32).

Zuſatz. Iſt die gegebene Ebene ſenkrecht zur $\left\{\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{V}}\right\}$-Ebene, ſo iſt ihre $\left\{\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{V}}\right\}$-Spur die gemeinſchaftliche $\left\{\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{V}}\right\}$-Projection aller möglichen in ihr gezogenen Linien.

§. 37.

Aufg. Die Projectionen eines Punctes anzugeben, der in einer gegebenen Ebene beliebig liegt.

Aufg. Ziehe in der Ebene eine beliebige Gerade (§. 36) und nimm in derſelben einen beliebigen Punct (§. 7.)

Zuſatz. Steht eine Ebene ſenkrecht zur $\left\{\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{H}}\right\}$-Ebene, ſo fällt die $\left\{\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{V}}\right\}$-Projection jedes in ihr liegenden Puncts in ihre $\left\{\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{V}}\right\}$-Spur; denn die Ebene enthält das $\left\{\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{V}}\right\}$-projicirende Loth des Punctes. Umgekehrt: Geht die $\left\{\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{V}}\right\}$-Spur einer Ebene durch die $\left\{\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{V}}\right\}$-Projection eines in ihr gelegenen Punctes, ſo ſieht die Ebene ſenkrecht zur $\left\{\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{V}}\right\}$-Ebene.

Die Projectionen eines Punctes fallen daher beide in die gleichnamigen Spuren einer Ebene, die durch ihn ſenkrecht zum Grundſchnitt gelegt iſt. Umgekehrt: Gehen die Spuren einer Ebene durch die gleichnamigen Projectionen eines in ihr liegenden Punctes, ſo ſteht die Ebene ſenkrecht zum Grundſchnitt.

§. 38.

Aufg. Durch einen gegebenen Punct eine beliebige Parallellinie mit einer gegebenen Ebene zu ziehen.

Aufg. Ziehe in der gegebenen Ebene eine beliebige Gerade (§. 36) und mit dieſer eine Parallele durch den gegebenen Punct (§. 30), ſo iſt das Verlangte geſchehen (§. 2, XVIII).

§. 39.

Aufg. Zu entſcheiden, ob zwei Gerade in einerlei Ebene liegen.

Aufl. A. Sind die Projectionen der Geraden bekannt, ſo iſt nach §. 23 und §. 22 zu erſehen, ob die Linien im Raume ſich ſchneiden oder parallel ſind. Iſt keines von beiden der Fall, ſo können die Geraden nicht in einerlei Ebene liegen.

B. Sind die Geraden durch ihre Spuren gegeben, ſo verbinde man je die zwei gleichnamigen. Treffen beide Verbindungslinien im Grundſchnitte zuſammen, ſo liegen die Geraden in einerlei Ebene.

§. 40.

Aufg. Die $\left\{{\mathfrak{H} \atop \mathfrak{V}}\right\}$-Projection eines Puncts und ſeine $\left\{{\mathfrak{H} \atop \mathfrak{V}}\right\}$-Diſtanz ſind gegeben. Man ſoll ſeine $\left\{{\mathfrak{V} \atop \mathfrak{H}}\right\}$-Projection finden.

Aufl. Fälle aus der gegebenen Projection eine Senkrechte auf den Grundſchnitt und nimm in der Richtung dieſer Senkrechten einen Punct, der vom Grundſchnitt um die gegebene Diſtanz entfernt iſt, ſo iſt dieſer die zweite Projection (§. 7).

Man ſieht, daß man zwei Auflöſungen erhält, wofern nicht beſtimmt iſt, auf welcher Seite der $\left\{{\mathfrak{H} \atop \mathfrak{V}}\right\}$-Ebene der Punct im Raume liegt.

§. 41.

Aufg. Es iſt die $\left\{{\mathfrak{V} \atop \mathfrak{H}}\right\}$-Projection einer Geraden und die $\left\{{\mathfrak{H} \atop \mathfrak{V}}\right\}$-Projection eines in ihr liegenden Punctes gegeben. Man ſoll die zweite Projection des Punctes finden.

Aufl. Die geſuchte Projection muß in der gleichnamigen Projection der Geraden liegen und zugleich in der Senkrechten, welche aus der bekannten Projection auf den Grundſchnitt gefällt iſt (§. 7); ſie iſt alſo der Durchſchnitt dieſer beiden Linien.

§. 42.

Aufg. Eine Ebene POP′ und eine Projection einer in ihr liegenden Geraden ſind gegeben. Man ſoll die zweite Projection finden.

Digitized by Google

Fig. 3. Aufl. Die gegebene Projection ſei die horizontale ab. Da ſowohl dieſe als auch die horizontale Spur der Ebene die H-Spur der Linie enthalten muß, ſo iſt P dieſe Spur. Die V-Spur der Linie hat in p (wo ab den Grundſchnitt trifft) ihre H-Projection (§. 8), liegt alſo in der Senkrechten, die aus p auf dem Grundſchnitt errichtet wird; und da ſie zugleich in die verticale Spur OP′ der Ebene fallen muß, ſo iſt P′ ihre Lage. Aus den beiden Spuren P, P′ der Linie findet man nun die geſuchte V-Projection nach §. 32 *).

Fig. 6. Iſt ab || OP, ſo muß auch AB || OP ſein, alſo a′b′ || GS.

§. 43.

Aufg. Eine Ebene POP′ und eine Projection eines in ihr liegenden Punctes ſind gegeben; man ſoll die andere Projection des Punctes finden.

Fig. 3, 6. Aufl. Iſt die gegebene Projection die horizontale a, ſo betrachte man eine beliebig durch ſie gelegte Gerade ab als H-Projection einer in der Ebene durch A gezogenen Linie, ſuche deren V-Projection a′b′ (§. 42) und beſtimme die zu a gehörige V-Projection a′ (§. 41) **).

§. 44.

Aufg. Die Durchſchnittslinie zweier gegebenen Ebenen zu projiciren.

---

*) Da die Linien Pp, pP′ Spuren einer projicirenden Ebene ſind, ſo erſcheint die vorſtehende Aufgabe als beſonderer Fall der allgemeinen, welche in §. 44 gelöſt wird.

**) Wie man auch die H-Projection ab durch a legen mag, ſo muß die zugehörige V-Projection a′b′ immer durch denſelben Punct a′ gehen. Darin liegt ein Lehrſatz für die ebene Geometrie, welchen den Schüler in Worte zu faſſen ſuche.

Der Fall, daß die deſcriptive Geometrie auf Lehrſätze der reinen Geometrie leitet, kommt öfter vor, und das Aufſuchen ſolcher Sätze ſammt ihren (von der deſcriptiven Geometrie unabhängigen) Beweiſen kann Stoff zu nützlichen Übungen abgeben.

Digitized by Google

Aufl. Da die Durchſchnittslinie ſowohl der einen als der andern der gegebenen Ebenen angehört, ſo muß ihre H-Spur in den H-Spuren beider Ebenen zugleich liegen; ihre V-Spur in den V-Spuren beider Ebenen Die Spuren der Durchſchnittslinie ſind demnach die Durchſchnitte gleichnamiger Ebenenſpuren, und die geſuchten Projectionen findet man nach §. 32.

†) Sind zwei gleichnamige Spuren der Ebenen parallel, z. B. die V-Spuren OP′ und QP″, ſo iſt auch die Durchſchnittslinie mit ihnen parallel (§. 2, V.) Da nun OP′ ihre eigene V-Projection iſt und ihre H-Projection in den Grundſchnitt fällt (§. 9), ſo muß die V-Projection der Durchſchnittslinie || OP′, die H-Projection || GS ſein (§. 22). Fig. 28.

††) Iſt eine der gegebenen Ebenen parallel zu einer Grundebene (etwa zur HE, wie die Ebene P′R′ in Fig. 4), ſo iſt die Durchſchnittslinie beider parallel mit der entſprechenden Spur der andern Ebene; ihre eine Projection iſt daher ebenfalls mit dieſer Spur parallel, ihre andere fällt mit der Spur der erſtern Ebene zuſammen. (In Fig. 4. ſind ap, a′P′ die Projectionen der Schnittlinie.)

†††) Sind die gegebenen Ebenen (PR, P′R′), (TU, T′U′) beide dem Grundſchnitt parallel, ſo iſt es auch ihre Schnittlinie. Dieſe hat demnach weder H- noch V-Spur, und kann nach der oben gegebenen Regel nicht gefunden werden. Fig. 5.

Schneidet man nun beide Ebenen durch eine beliebige dritte Ebene VWV′, ſo werden die erhaltenen Schnittlinien ſich in einem Puncte (a, a′) begegnen, welcher auf dem Durchſchnitte der gegebenen Ebenen liegt; man hat daher nur noch durch a und a′ Parallelen mit dem Grundſchnitt zu ziehen.

Zuſatz. Fällt eine Spur der Durchſchnittslinie nicht mehr in das Zeichnungsblatt, wie in Fig. 4 der verticale, ſo nimmt man eine Hülfsebene VWV′ parallel zu einer der gegebenen Ebenen an und projicirt ihre Schnittlinie mit der andern. Dieſe Schnittlinie wird der geſuchten parallel ſein (§. 2, XVII); wenn man daher mit ihren Projectionen Parallelen durch P und p′ zieht, ſo ſind dieſe die verlangten Projectionen. Statt der Ebene VWV′ kann man auch eine Fig. 4.

Digitized by Google

mit einer Grundebene parallele Ebene zu Hülfe nehmen. Iſt z. B. die Ebene P′R′ der HE parallel, ſo ſchneidet ſie die gegebenen Ebenen nach zwei Horizontallinien (… R′P′), (ar, P′R′), deren Durchſchnitt (a, a′) nothwendig auf der Schnittlinie der gegebenen Ebene liegen muß, ſo daß a P, a′ p′ die Projectionen dieſer Schnittlinie ſind.

Fallen beide Spuren der geſuchten Schnittlinie über die Grenzen des Blattes hinaus, ſo ſchneide man die gegebenen Ebenen entweder durch zwei Hülfsebenen, welche den beiden Grundebenen oder auch einer und derſelben Grundebene parallel ſind; oder man nehme nur eine Hülfsebene dieſer Art an und erſetze die zweite durch eine andere Ebene, welche einer der gegebenen parallel iſt.

§. 45.

Aufg. Den Durchſchnittspunct einer gegebenen Geraden (ac, a′c′) und einer gegebenen Ebene POP′ zu projiciren.

Aufl. Dieſer Punct muß in der Linie liegen, nach welcher eine durch AC gehende Ebene die POP′ ſchneidet. Man lege daher durch AC eine beliebige Ebene E (§. 34) und projicire den Schnitt L von E und POP′ (§. 44), ſo ſind die Puncte, in welchen l und l′ die ac und a′c′ treffen, die Projectionen des geſuchten Durchſchnittspuncts. (Probe für die Genauigkeit der Zeichnung aus §. 7).

Fig. 3. Am einfachſten wird in der Regel die Conſtruction, wenn man für die Ebene E eine der projicirenden Ebenen von AC nimmt. In Fig. 3 iſt PpP′ die horizontalprojicirende Ebene, (Pp, P′p′) ihr Schnitt mit POP′, alſo a′ die V-Projection des verlangten Puncts, deſſen H-Projection a man nach §. 41 erhält.

§. 46.

Aufg. Zu unterſcheiden, ob eine gegebene Gerade einer gegebenen Ebene parallel ſei oder nicht.

Aufl. I. Lege durch die Gerade eine beliebige Ebene E und projicire ihren Schnitt mit der gegebenen Ebene. Sind die erhaltenen Projectionen den gleichnamigen Projectionen der gegebenen Geraden parallel, ſo iſt die Gerade ſelbſt der Ebene parallel (§. 2, XVIII).

Läßt man für die Ebene E eine der projicirenden Ebenen gelten, ſo hat man nur einziges Linienpaar zu vergleichen. Wäre z. B. in Fig. 3 a′b′ ‖ a′c′, ſo wäre AC ‖ POP′.

Aufl. II. Wähle in der $\left\{\frac{H}{V}\right\}$-Spur der gegebenen Ebene einen beliebigen Punct, zeichne die Projectionen einer Linie, welche durch dieſen Punct geht und der gegebenen Geraden parallel iſt, und beſtimme die $\left\{\frac{V}{H}\right\}$-Spur dieſer Linie. Fällt dieſe in die $\left\{\frac{V}{H}\right\}$-Spur der gegebenen Ebene, ſo iſt die gegebene Gerade der Ebene parallel.

§. 47.

Aufg. Die Spuren einer durch drei gegebene Puncte beſtimmten Ebene zu zeichnen.

Aufl. Es iſt klar, daß ſtatt dreier Puncte ebenſowohl ein Punct und eine Gerade, oder zwei ſich ſchneidende Gerade, oder zwei Parallelen gegeben ſein können. In den beiden letztern Fällen hat man die Spuren der Geraden zu ſuchen (§. 31) und die gleichnamigen zu verbinden; die Verbindungslinien ſind die verlangten Spuren der Ebene (§. 20).

Sind drei Puncte gegeben, ſo verbinde man einen derſelben mit den beiden andern, oder man lege durch zwei eine Gerade und durch den dritten eine Parallele mit ihr, und verfahre mit dem erhaltenen Linienpaare wie vorhin.

(Probe für die Genauigkeit der Conſtruction: die gefundenen Spuren müſſen ſich im Grundſchnitte begegnen.)

Zuſatz I. Liegen die drei gegebenen Puncte (alſo auch ihre gleichnamigen Projectionen) in gerader Linie, ſo ſind unendlich viele Ebenen durch ſie möglich.

Zuſatz II. Wenn eine von den vier Spuren der gegeben Geraden auſſerhalb des Zeichnungsblattes liegt, ſo hat man die Aufgabe des §. ~~33~~ zu löſen.
34

Digitized by Google

Fallen die 4 Spuren über die Grenzen des Blattes hinaus, ſo kann der Fall eintreten, daß die Spuren der geſuchten Ebene ſelbſt ganz außerhalb des Blattes liegen, alſo der Aufgabe auf dem disponibeln Raume nicht genügt werden kann. Läßt aber die Lage der gegebenen Linien vermuthen, daß der Raum noch Stücke jener Spuren aufnimmt, ſo wählt man zwei Puncte in der einen und einen dritten Punct in der zweiten Linie ſo, daß die Verbindungslinien eines ſolchen Puncts mit den beiden andern die Grundebenen noch innerhalb des Blattes ſchneiden. Da dieſe Verbindungslinien in derſelben Ebene mit den gegebenen Linien liegen, ſo erhält man durch Verbindung ihrer gleichnamigen Spuren die verlangten Ebenenſpuren. Man kann auch, wenn die gegebenen Linien nicht ſelbſt parallel ſind, in jeder derſelben einen ſchicklichen Punct wählen, durch ihn eine Parallele mit der andern ziehen und die Spuren dieſer beiden neuen Linien beſtimmen.

Wie hilft man ſich, wenn a.) zwei gleichnamige oder b.) zwei ungleichnamige Spuren der gegebenen Linien außerhab des Blattes liegen?

§. 48.

Aufg. Durch einen gegebenen Punct (a, a′) eine Ebene parallel einer gegebenen Ebene TQT′ zu legen.

Aufl. Ziehe durch (a, a′) eine beliebige Parallele zu TQT′ (§. 38), beſtimme ihre Spuren und ziehe durch dieſelben Parallelen zu PQ und P′Q, ſo ſind dieſe die verlangten Spuren (§§. 20, 21) (und müſſen ſich bei genauer Zeichnung im Grundſchnitte begegnen).

Fig. 6. Die Conſtruction wird am einfachſten, wenn man die mit TQT′ parallele Hilfslinie zugleich parallel mit einer Grundebene (alſo parallel mit einer der gegebenen Spuren) annimmt. Eine ſolche Linie hat zwar nur **eine** Spur, aber man reicht auch mit dieſer einen aus, wenn nur die zuerſt aufgefundene Ebenenſpur den Grundſchnitt noch innerhalb des Zeichnungsblattes trifft. In Fig. 6 iſt (ap, a′P′) der

Digitized by Google

H=Spur TQ parallel, P′ ihre Spur, P′O || T′Q, OP || QT, alſo POP′ die geſuchte Ebene.

§. 49.

Aufg. Durch eine gegebene Gerade M eine Ebene parallel einer gegebenen Geraden N zu legen.

Aufl. Man ziehe durch einen beliebigen Punct der M eine Parallele L zu N (§. 30) und lege durch M und L eine Ebene (§. 47), ſo iſt dieſe die geſuchte (§. 2, XVIII).

Zuſatz. Sind M und N parallel, ſo iſt die Ebene unendlich vieler Lagen fähig. Schneiden ſie ſich, ſo beſtimmen ſie unmittelbar die Ebene. (Das Zuſammenfallen einer Linie und einer Ebene iſt ein beſonderer Fall des Parallelſeins der Linie und Ebene).

§. 50.

Aufg. Durch einen gegebenen Punct eine Gerade ſenkrecht zu einer gegebenen Ebene zu ziehen.

Aufl. Die Projectionen der verlangten Geraden ſind die beiden Senkrechten, die man aus den Projectionen des Puncts auf die gleichnamigen Spuren der gegebenen Ebene fällt (der Punct mag in oder außerhalb der Ebene liegen) (§. 24).

§. 51.

Aufg. Durch einen gegebenen Punct (a, a′) eine Ebene ſenkrecht zu einer gegebenen Geraden (cd, c′d′) zu führen.

Aufl. Man denke ſich eine beliebige zu CD ſenkrechte Ebene TQT′ (§. 24) und lege parallel zu ihr eine Ebene durch A (§. 48), ſo iſt dieſe die geſuchte. Fig. 6.

Wendet man zur Auffindung der Parallelebene jene Conſtruction an, welche in §. 48 als die einfachſte bezeichnet wurde, ſo braucht man die Spuren der Ebene TQT′ gar nicht zu zeichnen; denn da ſie ſenkrecht zu den gleichnamigen Pro-

Digitized by Google

jectionen von CD ſind, ſo kann man die Projectionen einer Geraden, die mit einer dieſer Spuren parallel ſein würde, unmittelbar zeichnen. In Fig. 6 iſt $ap \perp cd$, $a'P' \parallel$ GS, alſo AP′ parallel zur H=Spur von TQT′. Eine Gerade P′O, durch die V=Spur P′ der AP′ ſenkrecht zu c′d′ gezogen, iſt die verticale — eine Senkrechte durch O auf cd die horizontale Spur der geſuchten Ebene.

Es iſt für die Auflöſung der Aufgabe gleichgiltig, ob A in oder außer BC liegt.

Zuſatz. Die Auflöſung wird bedeutend einfacher, wenn die gegebene Gerade in einer Grundebene liegt. Iſt z. B. OP (Fig. 9) dieſe Gerade, ſo geht die geſuchte Ebene durch das Projectionsloth Aa, mithin ihre H=Spur durch a; zugleich iſt letztere ſenkrecht zu OP, die V=Spur ſenkrecht zum Grundſchnitt.

§. 52.

Aufg. Aus einem gegebenen Puncte A eine Senkrechte auf eine gegebene Gerade M zu fällen.

Aufl. Lege durch A eine Ebene ſenkrecht zu M (§. 51) und beſtimme den Punct B, in welchem ſie von M getroffen wird (§. 45), ſo iſt die Verbindungslinie AB die verlangte Senkrechte. *)

§. 53.

Aufg. Aus einem gegebenen Puncte A einer gegebenen Geraden M eine Senkrechte auf ihr zu errichten, welche einer gegebenen Ebene P parallel iſt.

Aufl. Lege durch A eine Ebene Q ſenkrecht zu M (§. 51), beſtimme den Durchſchnitt N von Q und P (§. 44) und ziehe durch A eine Parallele mit N (§. 30).

(In welchem Falle kann die geſuchte Linie unendlich viele Lagen haben?)

*) Eine andere Auflöſung ſ. §. 63 Zuſ.

Digitized by Google

§. 54.

Aufg. Durch eine gegebene Gerade N eine Ebene ſenkrecht zu einer gegebenen Ebene P zu führen.

Aufl. Ziehe durch einen beliebigen Punct der N eine Senkrechte K zu P (§. 50) und lege durch K und N eine Ebene (§. 47), ſo iſt dieſe die verlangte (§. 2, XI).

Die Linie M kann auch in der Ebene P liegen.

(Wann läßt die Aufgabe unendlich viele Löſungen zu?)

§. 55.

Erklärung. Eine Ebene in die $\left\{\frac{H}{V}\right\}$-Ebene umklappen, heißt: ſie um ihre $\left\{\frac{H}{V}\right\}$-Spur ſo lange drehen, bis ſie mit der $\left\{\frac{H}{V}\right\}$-Ebene zuſammenfällt.

Es iſt klar, daß man jede Ebene in eine und dieſelbe Grundebene auf doppelte Weiſe umklappen kann, je nachdem man ſie nach der einen oder andern Seite hin dreht. (Ein Beiſpiel von Umklappung iſt bereits durch das Zurücklegen der Verticalebene gegeben.)

§. 56.

Aufg. Eine Linie, welche in S und S′ ihre Spuren hat, ſoll mit ihrer horizontalprojicirenden Ebene SsS′ einmal in die VE, das anderemal in die HE umgeklappt werden.

Aufl. Bei der Umklappung in die VE bleibt S′s (als Drehungsaxe) unbeweglich; Ss wird, da ſie immer auf S′s ſenkrecht bleibt, während der Drehung in der HE hinſtreifen; jeder ihrer Puncte beſchreibt einen Kreis um s und kommt nach vollendeter Drehung in den Grundſchnitt zu liegen; ſo der Punct S nach S_1 (oder auch auf die andere Seite von s); daher iſt $S'S_1$ die Lage der SS′ nach verticaler Umklappung der Ebene SsS′. Fig. 17.

Wird SsS′ in die HE umgeklappt, ſo bleibt Ss unbeweglich und S′s beſtändig ſenkrecht auf Ss; S′s wird alſo auch nach vollendeter Drehung noch ſenkrecht zu Ss ſein.

Digitized by Google

Ferner kann ein Punct in S′s ſeine Entfernung von s während der Drehung nicht ändern. Macht man daher $\angle SsS'_2 = 90°$, $sS'_2 = sS'$, ſo iſt SS'_2 die Lage der SS′ nach horizontaler Umklappung von SsS′. (Man hätte auch sS'_2 nach der entgegengeſetzten Seite von Ss antragen können.

(Zur Uebung: Eine Linie werde mit ihrer verticalprojicirenden Ebene in beide Grundebenen umgeklappt).

§. 57.

Aufgabe. Die Horizontalſpur PO einer Ebene und die Projectionen a, a′ eines in ihr liegenden Punctes ſind gegeben. Man ſoll die Lage des Puncts angeben, nachdem die Ebene in die HE umgeklappt worden.

Fig. 7. Aufl. I. Denkt man ſich ſowohl aus A als aus deſſen Projection a Senkrechte auf OP gefällt, ſo werden beide einerlei Fußpunct F haben (§. 2, X). Dreht man nun die gegebene Ebene um OP, ſo muß AF ſtets ſenkrecht auf OP bleiben, alſo nach vollendeter Drehung in die Richtung von aF fallen. Die Lage des Puncts A nach der Umklappung wird daher beſtimmt ſein, ſobald man ſeine Entfernung von F kennt. Dieſe iſt aber die Hypotenuſe eines rechtwinkeligen Dreiecks A F a, deſſen eine Kathete a F, deſſen andere Aa = ma′ iſt. Macht man demnach mn = a F, $FA_1 = a'n$, ſo iſt A_1 die Lage von A nach Umklappung der Ebene AOP.

Fig. 13. †) Fällt a in OP, d. h. iſt die Ebene ſenkrecht zur HE, ſo fällt F mit a zuſammen, und es iſt AF = ma′.

Fig. 8. ††) Iſt OP ⊥ GS, d. h. iſt die Ebene ſenkrecht zur VE, ſo würde ihre V-Spur durch a′ gehen und es iſt A F = a′ O (§. 26). Die Gerade aA_1 und der Bogen $a'a_1$ in der Figur ſtellen die Projectionen des Kreisbogens AA_1 dar, welcher von dem Puncte A während der Drehung der Ebene beſchrieben wird (§. 28 Zuſ.).

Fig. 7. Aufl. II. Man denke ſich wie vorhin die Linie AF ſenkrecht auf OP gefällt und außerdem noch in der umzuklappenden Ebene durch A eine Parallele AS mit der VE

Digitized by Google

gezogen. Iſt aS ‖ GS, Ss' ⊥ GS, ſo ſind aS, a's' die Projectionen und S die H-Spur derſelben. Die V-Projection a's' zeigt die wahre Länge von AS (§. 26). Um daher das (bei F rechtwinkelige) Dreieck AFS in ungeklappter Lage zu zeichnen, hat man aF zu verlängern und von S aus mit einem Kreisbogen vom Halbmeſſer a's' zu durchſchneiden. Der Schnittpunct A_1 iſt die verlangte Umklappung des Puncts A.

§. 58.

Aufg. Ein Punct A liegt in einer gegebenen Ebene POP' ſo, daß er nach horizontaler Umklappung derſelben die Stelle A_1 einnimmt. Man zeichne ſeine Projectionen für die urſprüngliche Stellung der Ebene.

Aufl. Bei dem Zurückbewegen der umgeklappten Ebene bleibt A in der auf PO ſenkrechten Ebene FQP', beſchreibt hier einen Kreisbogen, und kommt endlich in der Geraden FP' an, nach welcher dieſe Ebene die gegebene Ebene ſchneidet. Klappt man alſo das Dreieck FQP', welches jene Schnittlinie FP' zur Hypothenuſe hat, in die HE um (§. 56) und macht FA,, = FA_1, ſo iſt A,, wieder eine Umklappung von A; und nun ſieht man leicht, daß man mittels einer von A,, auf FQ gefällten Senkrechten die H-Projection a und die H-Diſtanz A,,a des Punctes A erhält, alſo auch (nach §. 40) ſeine V-Projection a'. (Als Genauigkeitsprobe kann man die V-Projection f'P' der Schnittlinie FP' zeichnen und zuſehen, ob ſie durch a' geht). Fig. 9.

(Der Schüler löſe die Aufgabe auch mittels verticaler Umklappung der Ebene FQP'.)

§. 59.

Aufg. Eine Ebene iſt durch eine horizontale Linie (bc, b'c') und einen Punct (a, a') beſtimmt. Man ſoll die H-Projection angeben, welche dieſem Puncte entſpricht, wenn man die Ebene durch Drehung um (bc, b'c') in horizontale Lage gebracht hat.

Digitized by Google

Fig. 10. Aufl. I. Führt man durch A ſenkrecht zu BC eine Ebene E, ſo beſchreibt A in derſelben während der Drehung der gegebener Ebene einen Kreisbogen, deſſen H-Projection in ihre Spur fällt; alſo wird ſich auch die neue Lage des Puncts A in dieſe Spur projiciren, welche man erhält, wenn man aus a eine Senkrechte aa_1 auf bc fällt (vgl. §. 51, Zuſ.) Zeichnet man nun noch die Projectionen ac, a′c′ einer durch A gehenden Geraden, welche parallel zur VE iſt und zugleich die BC in C ſchneidet, ſo ſtellt a′c′ die wahre Länge derſelben oder die Entfernung des Puncts A von C vor (§. 26); und da dieſe Entfernung nach vorgeſchriebener Drehung der gegebenen Ebene ſich auch auf die HE in der wahren Größe projiciren muß, ſo findet man die verlangte neue Projection a_1 des bewegten Puncts A als Schnitt der aa_1 und eines Kreisbogens, welcher c zum Mittelpunct und a′c′ zum Halbmeſſer hat.

Fig. 10. Aufl. II. Die vorhin erwähnte Ebene E ſchneidet die BC in einen Punct F, deſſen Horizontalprojection f iſt und deſſen V-Projection in b′c′ liegt. Wäre die Entfernung AF bekannt, ſo würde man offenbar den geſuchten Punct a_1 erhalten, wenn man $fa_1 = AF$ machte. Die Größe dieſer Entfernung iſt aber (wie die zweite Auflöſung der nächſtfolgenden Aufgabe zeigt) der Hypotenuſe a′f,, des Dreiecks a′vf,, gleich, deſſen einer Kathete vf,, man die Länge af gegeben hat.

§. 60.

Aufg. Die Entfernung zweier gegebenen Puncte (a, a′), (b, b′) darzuſtellen.

Fig. 11. Aufl. I. Liegen beide Puncte auf einerlei Seite der HE (wie Fig. 11 angenommen wurde), ſo beſtimmen ſie mit ihren H-Projectionen einen Trapez ABba, welches bei a und b rechte Winkel hat und deſſen parallele Seiten die H-Diſtanzen der Puncte A und B ſind. Man kann nun die durch AB gehende horizontalprojicirende Ebene mit dem in ihr enthaltenen Trapez in die HE umklappen und dieſes

Digitized by Google

zeichnen, wenn man

$$\angle baA_1 = \angle abB_1 = 90°$$
$$aA_1 = ma'$$
$$bB_1 = nb'$$

macht; dann iſt $A_1 B_1$ die geſuchte Länge.

(Probe für die Genauigkeit der Zeichnung: die verlängerte $A_1 B_1$ muß durch die H-Spur der Verbindungslinie (ab, a′b′) gehen).

Statt der h-projicirenden Ebene kann man auch die v-projicirende umklappen. Lägen die Puncte A, B auch auf einerlei Seite der VE, ſo hätte man wie vorhin ein Trapez zu conſtruiren. In der angenommenen Figur aber liegen ſie auf entgegengeſetzten Seiten, ſo daß die Verbindungslinie AB die VE ſchneidet, und ſtatt des Trapezes erſcheint die Figur a′ b′ B_2 A_2, welche man erhält, wenn man in den Endpuncten von a′ b′ die V-Diſtanzen der Puncte A, B unter rechten Winkeln, aber nach entgegengeſetzten Seiten, anſetzt.

(Probe der Zeichnung: S′s ⊥ GS, d. h. S′ muß die V-Spur der (ab, a′b′) ſein.)

Es iſt klar, daß auch die zwiſchen A, B und a, b gelegene Figur kein Trapez iſt, ſobald A und B auf entgegengeſetzten Seiten der HE liegen.

Aufl. II. Denkt man AB gezogen und durch B eine zu ihrer H-Projection parallele Geraden BC, welche das Projectionsloth Aa in C trifft, ſo erhält man die V-Projection a′b′c′ des Dreiecks ABC, wenn man b′c′ || GS zieht. Nur die eine Kathete AC desſelben projicirt ſich in ihrer wahren Länge; wird aber das Dreieck um AC gedreht, bis ſeine Ebene der VE parallel iſt, ſo werden auch ſeine beiden andern Seiten in wahrer Größe projicirt erſcheinen. Da bei dieſer Drehung der Punct B ſeine H-Diſtanz nicht ändert, mithin ſeine V-Projection fortwährend in der Linie c′b′ bleiben muß, und da es ferner klar iſt, daß die wahre Länge der Kathete BC mit der Länge der H-Projection von AB übereinſtimmt, ſo hat man nur c′b,, = ab zu machen und a′b,, Fig. 12.

Digitized by Google

zu ziehen, um in a′b,,c′ die wahre Geſtalt und Größe des Dreiecks ABC zu haben. Die Hypotenuſe a′b,, zeigt die geſuchte Entfernung AB.

Ebenſo kann man durch B eine Parallele BD zur V-Projection der AB ziehen, das Projectionsloth Aa′ bis zum Durchſchnitte D mit BD verlängern, und das Dreieck ABD projiciren, nachdem man es durch Drehung um AD horizontal gelegt hat. Iſt bd || GS, $db_1 = a'b'$, ſo iſt abd die H-Projection des Dreiecks für ſeine urſprüngliche Lage; ab_1d für ſeine horizontale Lage; alſo $ab_1 = AB$.

§. 61.

Uebungsaufgaben.

1.) Gegeben: Die wahre Länge einer Geraden, die Projectionen ihres Anfangspuncts und eine Projection ihres Endpuncts. Geſucht: die andere Projection des Endpuncts.

2.) Ggb: Die Projectionen einer Geraden und eines Puncts in ihr. Geſ: die Projectionen eines zweiten Puncts auf der Geraden, der von jenem einen gegebenen Abſtand hat.

§. 62.

Aufg. Die Entfernung eines gegebenen Punctes A von einer gegebenen Ebene POP′ anzugeben.

Aufl. I. Fälle aus A eine Senkrechte auf POP′ (§. 50), projicire deren Fußpunct B (§. 45) und ſuche die Länge von AB (§. 60).

Fig. 13. Aufl. II. Eine durch AB und das Projectionsloth Aa gelegte Ebene PQP′ iſt ſenkrecht auf OP (§. 2, XI, XII) und ſchneidet die gegebene nach einer Geraden PP′, welche den Fußpunct B der AB enthält. Zeichnet man (nach §. 51, Zuſ.) die Spuren dieſer Ebene, klappt dieſelbe in die HE um und beſtimmt hier die Lage PP,, der Schnittlinie PP′ (§. 56), ſo wie die Lage A_1 des Puncts A (§. 57, †), ſo giebt die von A_1 auf PP,, gefällte Senkrechte A_1B_1 die

verlangte Entfernung an. (Zur Übung ſuche man dieſelbe auch mittels der verticalen Umklappung von PQP'.)

(Wie erkennt man in jeder Auflöſung, ob der gegebene Punct über oder unter der gegebenen Ebene liegt?)

§. 63.

Aufg. Die Entfernung eines gegebenen Puncts A von einer gegebenen Geraden M anzugeben.

Aufl. I. Fälle aus A eine Senkrechte zu M (§. 52) und beſtimme die Entfernung des Fußpuncts derſelben von A (§. 60).

Aufl. II. Beſtimme die H-Spur der durch A und M gehenden Ebene A M, klappe dieſe in eine Grundebene um, und fälle aus der Umklappung von A eine Senkrechte auf die Umklappung von M.

Zuſatz. Hieraus ergiebt ſich auch eine zweite Auflöſung für die Aufgabe des §. 52. Denn iſt B_1 der Fußpunct der in der umgeklappten Ebene AM gezogenen Senkrechten, ſo muß die H-Projection b dieſes Puncts nach der Zurückbewegung der Ebene in der Senkrechten liegen, die man von B_1 auf die H-Spur der Ebene fällen kann; und da dieſe Projection b zugleich in die H-Projection der M fallen muß, ſo iſt ſie leicht zu beſtimmen. Die zugehörige V-Projection b' ergiebt ſich nach §. 41, und die Projectionen der geſuchten Senkrechten ſind dann die Verbindungslinien ab und a'b'.

§. 64.

Aufg. Die Entfernung zweier paralleler Ebenen POP', RQR' anzugeben.

Aufl. Man könnte in der einen Ebene einen beliebigen Punct annehmen (§. 57) und ſeine Entfernung von der andern beſtimmen (§. 62). Kürzer aber iſt folgende Auflöſung:

Zieht man TP ⊥ OP, TP' ⊥ OS, ſo iſt die Ebene PTP' ſenkrecht zu OP und QR (§. 24), alſo auch ſenkrecht zu den beiden gegebenen Ebenen (§. 2, XI). Die Ent- Fig. 14.

fernung der letztern iſt demnach gleich der Entfernung der beiden Linien, nach welchen ſie durch die PTP′ geſchnitten werden. Klappt man die Ebene PTP′ in die VE um, ſo ſtellt P_1P' die eine dieſer Schnittlinien vor (§. 56); die andere ließe ſich (in der Fläche des umgeklappten Dreiecks PTP′) eben ſo leicht angeben; da man aber nur einen ihrer Puncte zu kennen braucht und R′ ein ſolcher Punct iſt, ſo fälle man $R'E \perp P_1P'$, um in R′E die geſuchte Entfernung zu haben.

Es iſt klar, daß man ſtatt der PTP′ auch eine Ebene ſenkrecht zu den V=Spuren der gegebenen Ebenen hätte zu Hülfe nehmen können.

†) Stehen die gegebenen Ebenen beide ſenkrecht zur $\left\{ {H \atop V} \right\}$=E, ſo iſt ihre Entfernung gleich der Entfernung ihrer $\left\{ {H \atop V} \right\}$=Spuren.

§. 65.

Uebungsaufgaben.

1.) Eine Ebene einer gegebenen in beſtimmter Entfernung parallel zu legen.

2.) Die V=Projection einer Geraden zu finden, welche eine gegebene H=Projection hat und einer gegebenen Ebene in gegebener Entfernung parallel iſt.

3.) Die H=Projection eines Puncts anzugeben, deſſen V=Projection und deſſen Enfernung von einer gegebenen Ebene bekannt ſind.

§. 66.

Aufg. Die Entfernung zweier gegebener Parallellinien (ab, a′b′), (cd, c′d′) anzugeben.

Aufl. Man nehme in der einen Linie willführlich einen Punct (am bequemſten eine Spur), und ſuche ſeine Entfernung von der andern (§. 63). Oder man lege eine Ebene ſenkrecht zu beiden Linien, beſtimme die Schnittpuncte der Linie in ihr (§. 45) und klappe die Ebene mit dieſen Schnittpuncten (deren Abſtand der geſuchten Entfernung gleich iſt) in eine Grundebene um (§. 57) (ſ. Fig. 16). Oder man klappe die durch die gegebenen Parallelen beſtimmte Ebene um.

Digitized by Google

Wenn der Raum des Zeichnungsblattes die Beſtimmung zweier gleichnamiger Spuren der Parallelen geſtattet, ſo iſt das zuletzt genannte Verfahren das kürzeſte. In Fig. 15 iſt ST die H-Spur der durch AB und CD gehenden Ebene P, (a, a′) ein in AB beliebig gewählter Punct, A_1 die Lage dieſes Puncts nach Umklappung der P in die HE (vgl. §. 57), alſo SA_1 die Lage von SA (oder AB) in der umgeklappten P. Die (mit P umgeklappte) CD würde durch T gehen; daher giebt die Länge TE einer von T auf SA_1 gefällten Senkrechten die geſuchte Entfernung. Fig. 15.

§. 67.

Aufg. **Die Projectionen einer Geraden CD zu finden, welche mit einer gegebenen Geraden AB auf einen gegebenen Abſtand δ parallel iſt und deren H-Projection durch den Punct d geht.**

Aufl. Zunächſt kann man die H-Projection cd der geſuchten Geraden ziehen (§. 30). Fig. 16.

Denkt man die AB und die CD durch eine Ebene POP′ ſenkrecht geſchnitten (§. 24) und dieſe in die HE umgeklappt, ſo müſſen beide Schnittpuncte in die Projectionen ab und cd fallen und hier um die gegebene Entfernung δ von einander abſtehen. Beſtimmt man daher die Projectionen a, a′ und die umgeklappte Lage A_1 des Schnittpunctes A, welcher der AB entſpricht (§§. 45, 57) und durchſchneidet die cd von A_1 aus mit δ, ſo iſt der Durchſchnitt C_1 die umgeklappte Lage des Puncts C, in welchem CD die Ebene POP′ trifft. Der Punct P, wo die Verbindungslinie A_1C_1 der Spur OP begegnet, iſt die H-Spur einer durch A und C gehenden Geraden; alſo iſt Pa die H-Projection dieſer Geraden und c die H-Projection des Puncts C. Zeichnet man auch die V-Projection a′p′ der Geraden AP, ſo ergiebt ſich die V-Projection c′ des Punctes C nach §. 41, und eine durch c′ gelegte Parallele mit a′b′ iſt die geſuchte V-Projection der CD. (Die Projectionen c und c′ laſſen ſich auch unabhängig vom Puncte P, der manchmal in unbequeme

Digitized by Google

Entfernung fallen kann, auffinden. Hiezu folgende Andeutungen: Man hat behufs der Umklappung von POP′ ein Dreieck a′mv conſtruirt, welches dem Dreieck Aaf congruent iſt; letzteres iſt aber offenbar dem Dreieck Ccg ähnlich; macht man daher vw = C_1 g, wr || am, ſo iſt vr = cg und wr = nc′.)

Der um A_1 mit δ beſchriebene Kreisbogen ſchneidet die cd außer in C_1 noch in einem zweiten Puncte, mit welchem man eben ſo verfahren kann, wie mit C_1. Die Aufgabe wird daher im Allgemeinen zwei Auflöſungen zulaſſen.

§. 68.

Aufg. Den kleinſten Abſtand zwiſchen zwei gegebenen Geraden M, N zu beſtimmen.

Aufl. Sind die gegebenen Geraden parallel, ſo iſt ihr Abſtand überall derſelbe und wird nach §. 66 gefunden. Schneiden ſie ſich, ſo iſt der kleinſte Abſtand = o. Für jeden andern Fall erhält man die Länge des geſuchten Abſtandes, wenn man durch die eine Gerade M eine Ebene E parallel zur andern Geraden N legt (§. 49) und die Entfernung der N von dieſer Ebene beſtimmt. Letzteres geſchieht, indem man aus einem beliebigen Puncte A_0 der N eine Senkrechte auf die Ebene E fällt (§. 50), ihren Fußpunct B_0 projicirt (§. 45) und die Größe A_0B_0 zeichnet (§. 60).

Sollen in beiden Geraden die Puncte A und B ſelbſt beſtimmt werden, welche am nächſten beiſammen liegen (deren Verbindungslinie alſo auf beiden Geraden zugleich ſenkrecht ſteht), ſo denke man ſich die Senkrechte A_0 B_0 parallel mit ſich ſelbſt ſo lange an N fortbewegt, bis der Fuß B_0 in der M ankommt, in welchem Augenblicke A_0 mit A und B_0 mit B zuſammen fallen muß. Da bei dieſer Bewegung B_0 in der Ebene E eine Parallele mit N beſchreibt, ſo wird man auf folgende Conſtruction geführt. Sind a_0, b_0, m, n die H-Projectionen von A_0, B_0, M, N, ſo ziehe man durch b_0 eine Parallele zu n, welche die m in a ſchneidet; ferner durch a eine Parallele zu a_0 b_0, welche die n in b ſchneidet. Dann ſind a, b die H-Projectionen der ver-

Digitized by Google

langten Puncte A, B. Die V-Projectionen erhält man nach §. 41; oder man ſucht ſie ganz ebenſo, wie man die H-Projectionen fand, und prüft die Genauigkeit der Zeichnung nach §. 7.

§. 69.

Aufg. Die Neigungen einer gegebenen Geraden gegen die Grundebenen darzuſtellen.

Aufl. Die Neigung einer Linie gegen eine Ebene iſt (wie aus der Stereometrie bekannt) der Winkel der Linie mit ihrer Projection auf die Ebene.

Sind S, S′ die Spuren der gegebenen Geraden, ſo liegt zwiſchen S, s und S′ ein rechtwinkeliges Dreieck, welches bei S den Neigungswinkel α gegen die HE enthält. Man hat daher nur dieſes Dreieck in eine Grundebene umzuklappen (§. 56), um es in ſeiner wahren Geſtalt zeichnen und den Winkel α angeben zu können. Zwiſchen S, s′ und S′ iſt ein anderes rechtwinkeliges Dreieck enthalten, welches bei S′ den Neigungswinkel β der gegebenen Geraden gegen die VE faßt. Klappt man dieſes Dreieck ebenfalls um, ſo findet man auch den Winkel β. (In Fig. 17 iſt jedes dieſer Dreiecke in beide Grundebenen umgeklappt.) Fig. 17.

†) Läuft die gegebene Linie parallel mit einer der Grundebenen, ſo zeigen die Winkel ihrer Projectionen gegen den Grundſchnitt die geſuchten Neigungen an.

††) Liegt die Linie in einer zum Grundſchnitte ſenkrechten Ebene, ſo ergänzen ſich beide Neigungswinkel zu 90°.

Zuſatz. Fallen die Spuren der gegebenen Geraden, oder eine derſelben, nicht mehr in das Zeichnungsblatt, ſo wähle man die Projectionen einer mit ihr parallelen ſo, daß man die Spuren dieſer letztern beſtimmen kann. Ihre Neigungswinkel gegen die Grundebenen werden mit den geſuchten übereinſtimmen. Oder man nehme in der gegebenen Geraden zwei beliebige Puncte A, B an, denke ſich durch B Parallelen BC, BD mit den Projectionen gezogen, bis ſie die von A ausgehenden projicirenden Linien in C und D ſchneiden, und conſtruire die Dreiecke ABC und ABD, wie es in Fig. 12 zu einem andern Zwecke bereits geſchehen.

Digitized by Google

Dann iſt offenbar $\angle a'b_{,,}c'$ ($= \angle ABC$) $= \alpha$,
$\angle a\,b_{,}\,d$ ($= \angle ABD$) $= \beta$.

Anmerkung. Eine Linie ſchließt mit ihrer Projection immer zwei Winkel ein, die ſich ſuppliren. Von dieſen ſoll aber hier immer der ſpitze vorzugsweiſe als Maß der Neigung betrachtet werden. Wenn man daher in ſpätern Aufgaben auf die Lage einer Linie aus den gegebenen Neigungswinkeln gegen die Grundebenen zu ſchließen hat, ſo ſind beide ſtets als ſpitz vorausgeſetzt. Der Allgemeinheit der Auflöſung geſchieht dadurch kein Eintrag, da man für einen gegebenen ſtumpfen Neigungswinkel immer ſein Supplement einführen kann.

Dieſelben Bemerkungen gelten zugleich für ſolche künftige Aufgaben, bei denen es ſich um die Neigungswinkel einer Ebene gegen die Grundebenen handelt.

Der Kürze wegen ſollen in der Folge ſowohl bei Ebenen als bei Linien die Benennungen H-Neigung, V-Neigung, G-Neigung (ſtatt: Neigungswinkel gegen die HE, VE, GE) gebraucht werden.

§. 70.

Uebungsaufgaben.

1.) Gegeben: Die H-Projection einer Geraden, ihre H-Spur und ihre H-Neigung. Geſucht: ihre V-Projection.

2.) Ggb: Die H-Projection einer Geraden, ihre H-Spur und ihre V-Neigung. Geſ: ihre V-Projection.

3.) Ggb: Die Spuren einer Ebene, eine Projection eines Punctes in ihr, und ein Winkel. Geſ: die Projectionen einer Geraden, welche in der Ebene durch jenen Punct ſo gezogen iſt, daß ſie mit einer der Grundebenen den gegebenen Winkel bildet.

§. 71.

Aufg. Die H-Neigung α und die V-Neigung β einer Geraden nebſt einem ihrer Puncte ſind gegeben. Man ſoll ihre Projectionen finden.

Aufl. Betrachtet man zuerſt einige beſondere Fälle, ſo kann man leicht zur allgemeinen Auflöſung übergehen.

Digitized by Google

1.) Der gegebene Punct ſei die V-Spur S′ der Geraden.

Man zeichne das Dreieck $S' S_0 s$ ſo, daß $\angle S' s S_0 = 90°$; und $\angle S' S° s = \alpha$. Dann iſt der mit $s S_0$ um s beſchriebene Kreis der geometriſche Ort für die H-Spur der geſuchten Geraden, und $S' S_0$ das zwiſchen die Grundebenen fallende Stück derſelben. Errichtet man daher über $S' S_0$ einen Halbkreis und macht $\angle S_0 S' T = \beta$, ſo iſt $T S_0$ die V-Diſtanz jener H-Spur und $S' T$ die Länge der V-Projection des zwiſchen beiden Spuren enthaltenen Stücks der Geraden. Man hat demnach mit $S' T$ einen Kreis um S′ zu beſchreiben und im Puncte s′, wo er den Grundſchnitt trifft, eine Senkrechte $s' S_1$ auf letzterem zu errichten, um die Lage S_1 oder S_2 der H-Spur zu finden. Da aber jener Kreis dem Grundſchnitte noch in einem andern Puncte s‴ begegnet, ſo erhält man für die H-Spur noch zwei Lagen S_3 und S_4, welche zugleich in die Verlängerungen der Geraden $S_2 s$ und $S_1 s$ fallen müſſen. (Die Puncte S_1, S_2, S_3, S_4 würden ſich auch ergeben haben, wenn man zu beiden Seiten des Grundſchnitts Parallelen $S_1 S_3$, $S_2 S_4$ mit ihm in der Entfernung $S_0 T$ gezogen hätte.) Fig. 18.

Es gibt demnach vier Linien, welche den Bedingungen der Aufgabe entſprechen; nämlich ($S_1 s$, $s' S'$), ($S_2 s$, $s' S'$), ($S_3 s$, $s''' S'$), ($S_4 s$, $s''' S'$).

†) Iſt $\beta = 90° - \alpha$ (oder $\alpha + \beta = 90°$), ſo iſt $\triangle S' T S_0 \cong \triangle S' s S_0$, alſo $S' T = S' s$. In dieſem Falle berührt der um S′ beſchriebene Kreis den Grundſchnitt in s; man erhält nur zwei Linien, welche der Aufgabe Genüge leiſten, und dieſe liegen in einer zum Grundſchnitte ſenkrechten Ebene (vgl. §. 69, ††).

††) Iſt $\beta > 90° - \alpha$ (oder $\alpha + \beta > 90°$), ſo iſt $S' T < S' s$ und die Aufgabe läßt keine Auflöſung zu.

2.) Die geſuchte Gerade gehe im Puncte C durch den Grundſchnitt.

Macht man $\angle b_0 C B_0 = \alpha$, ſo kann man $C B_0$ als die Lage der geſuchten Geraden betrachten, nachdem ſie mit ihrer h-projicirenden Ebene in die VE umgeklappt wor- Fig. 19.

Digitized by Google

den. Dreht man die projicirende Ebene wieder in ihre wahre Lage zurück, ſo bewegt ſich die H-Projection b_0 eines beliebigen Punktes B_0 der Geraden in einem Kreiſe $b_0 b_2 b_4$ um C, die V-Projection des nämlichen Punctes in der mit dem Grundſchnitt parallelen $B_0 b'''$. Der Punct B, welcher ſich nach B_0 umgeklappt hat, kann nun entweder vor oder hinter der VE liegen. Will man ihn daher (durch Umklappung der v-projicirenden Ebene von CB) in die HE legen, ſo hat man durch C entweder vor oder hinter dem Grundſchnitt eine Gerade unter dem Winkel β gegen letztern zu ziehen und auf ihr von C aus ein Stück $= CB_0$ abzutragen, wodurch man den Punct B° oder $\mathfrak{B}^\circ$ erhält. Beiden Lagen entſpricht aber offenbar eine und dieſelbe V-Projection b°, und dieſe wird beim Zurückdrehen der v-projicirenden Ebene in ihre wahre Stellung einen Kreis $b^\circ b' b'''$ um C beſchreiben. Die wahre Lage des Puncts B wird alſo zur V-Projection jedenfalls einen der Puncte b', b''' haben, in denen der Kreis $b^\circ b' b'''$ die Gerade $B_0 b'''$ ſchneidet. Die zugehörige H-Projection muß in dem Kreiſe $b_0 b_2 b_4$ liegen und zugleich in der aus der V-Projection auf den Grundſchnitt gefällten Senkrechten. Jeder V-Projection entſprechen aber zwei H-Projectionen (da die erwähnte Senkrechte den Kreis zweimal trifft), ſo daß man für den Punct B vier Lagen erhält. Die Aufgabe löſt mithin jede der vier Geraden (Cb_1, Cb'), (Cb_2, Cb'''), (Cb_3, Cb'''), (Cb_4, Cb').

(Die H-Projectionen b_1, b_2, b_3, b_4 müſſen um $B^\circ b^\circ$ vom Grundſchnitt entfernt ſein; alſo liegt B° mit b_1 und b_2 in gerader Linie, oder $\mathfrak{B}^\circ$ mit b_4 und b_3).

†) Für $\alpha + \beta = 90°$ iſt $C b^\circ = B_0 b_0$; der Kreis $b^\circ b'''$ berührt die Gerade $B_0 b'''$ und es giebt nur zwei Auflöſungen.

††) Für $\alpha + \beta > 90°$ iſt $B_0 b_0 > C b^\circ$; der Kreis trifft die Gerade gar nicht, und die Aufgabe iſt nicht zu löſen.

3.) Liegt der gegebene Punct (a, a′) irgendwo im Raume, ſo nehme man vorläufig einen Punct in einer Grundebene oder im Grundſchnitt an, lege durch dieſen Punct eine Gerade unter den gegebenen G-Neigungen

(nach 1 oder 2) und hierauf durch den Punct (a, a') eine Parallele mit ihr.

§. 72.

Lehrſ.

I. *Die Projectionen zweier gleichgroßen Linien auf einer Grundebene ſind gleichgroß, wenn die Grund-Neigungen beider Linien gleich ſind.* Denn zieht man durch den Endpunct jeder Linie eine Parallele mit ihrer Projection bis zum Durchſchnitt mit der aus dem Anfangspuncte gefällten projicirenden Linie, ſo entſtehen zwei rechtwinkelige Dreiecke, welche in der Hypotenuſe und einem anliegenden Winkel übereinſtimmen, alſo congruent ſind. Die mit der Grundebene parallele Kathete jedes ſolchen Dreiecks hat aber die Länge der Projection der Hypotenuſe, ſo daß mit der Gleichheit jener Katheten auch die Gleichheit dieſer Projectionen erwieſen iſt.

II. *Linien ſind gleichgroß, wenn ſie ſich auf eine Grundebene in gleicher Größe projiciren und gegen dieſe Ebene gleiche Neigung haben.* Denn die vorhin erwähnten rechtwinkeligen Dreiecke haben eine Kathete und den anliegenden Winkel von gleicher Größe, alſo auch die Hypotenuſen.

III. *Zwei Linien haben gleiche Neigung gegen eine Grundebene, wenn ſie bei gleicher Größe gleiche Projectionen haben.* Denn die rechtwinkeligen Dreiecke haben die Hypotenuſe und eine Kathete gleich, alſo auch den von beiden eingeſchloſſenen Winkel.

Zuſ. I. Alſo ſind die gleichnamigen Projectionen gleichgroßer Parallellinien gleichgroß. Und zwei Linien ſind gleich und parallel, wenn ſie in einer Ebene liegen und ihre gleichnamigen Projectionen gleich und parallel ſind.

Zuſ. II. Der obige Satz III läßt ſich zu folgendem verallgemeinern:

Zwei begrenzte Gerade haben gleiche G-Neigung, wenn ſie ſich verhalten wie ihre Projectionen. Denn die rechtwinkeligen Dreiecke, welche durch

die Geraden und die Längen ihrer Projectionen beſtimmt ſind, haben zwei Seiten proportionirt und den Gegenwinkel der größern gleich, ſind alſo ähnlich. Es folgt hieraus, daß die Größe der G-Neigung einer Linie blos vom **Verhältniß** der Linie zur Projection abhängt oder von dem Werthe des Bruches $\frac{l}{L}$, wo L die Länge der wahren Linie und l die Länge der Projection bedeutet. Man nennt den Werth dieſes Bruches den **Coſinus** der G-Neigung α, und ſchreibt

$$\frac{l}{L} = \cos.\,\alpha.$$

Der Coſinus der G-Neigung einer **unbegrenzten** Geraden ergiebt ſich eben ſo, wenn man ein beliebig in hr begrenztes Stück mit der Projection dieſes Stückes zuſammenhält.

§. 73.

Fig. 22. **Aufg. Die Neigungswinkel einer gegebenen Ebene POP′ gegen die Grundebenen zu finden.**

Aufl. Die H-Neigung wird durch den Winkel der beiden Geraden gemeſſen, nach denen eine zur H-Spur ſenkrechte Ebene die gegebene Ebene und die HE ſchneidet. Die verticale Spur P′p einer ſolche Schnittebene iſt ſenkrecht zum Grundſchnitt, die horizontale pP ſenkrecht zu OP (§§. 9, 24). In Pp hat man ſogleich einen Schenkel und in P die Spitze des geſuchten Neigungswinkels; der andere Schenkel (die Schnittlinie der Ebene PpP′ und der gegebenen) hat den Punct P′ zur V-Spur; der Winkel iſt alſo in ein rechtwinkeliges Dreieck P′pP geſchloſſen, und man erhält ſeine Größe α, wenn man dieſes Dreieck in umgeklappter Lage $P'pP_0$ zeichnet (§. 56).

Auf ähnliche Weiſe findet man die V-Neigung β.

†) Steht eine Ebene ſenkrecht auf der $\left\{\begin{smallmatrix}H\\V\end{smallmatrix}\right\}$-E, ſo iſt ihre Neigung gegen die $\left\{\begin{smallmatrix}V\\H\end{smallmatrix}\right\}$-E dem Winkel gleich, den ihre $\left\{\begin{smallmatrix}H\\V\end{smallmatrix}\right\}$-Spur mit dem Grundſchnitt einſchließt.

††) Die G-Neigungen einer Ebene, welche dem Grundſchnitt parallel iſt, oder durch denſelben geht, ergänzen ſich zu 90°. Iſt im letzteren Falle die Lage der Ebene dadurch

Digitized by Google

beſtimmt, daß man die Projection eines in ihr liegenden Punctes kennt, ſo findet man die G-Neigungen, indem man aus dieſem Puncte eine Senkrechte auf den Grundſchnitt fällt und deren Winkel gegen die Grundebenen beſtimmt.

Zuſ. Die G-Neigung einer Ebene iſt gleich der G-Neigung einer Geraden, welche in der Ebene ſenkrecht zu ihrer Spur gezogen wird. Hieraus und aus §. 72, Zuſ. II iſt zu erſehen, was man unter dem Coſinus der G-Neigung einer Ebene zu verſtehen habe.

§. 74.

Wirft man nun einen Blick auf die Aufgabe des §. 58 zurück, ſo ſieht man, daß $\angle QFA_{,,}$ (Fig. 9) die H-Neigung der Ebene POP′ darſtellt. Wäre daher dort die Ebene (ſtatt durch beide Spuren) durch die H-Spur und die H-Neigung α gegeben geweſen, ſo hätte man $A_1F \perp OP$, $\angle A_1FA_{,,} = \alpha$ gemacht; im Uebrigen bliebe das Verfahren ungeändert.

Eben ſo könnte bei der Aufgabe des §. 57 nur die H-Projection des Puncts A und ſtatt der andern Projection die H-Neigung α der Ebene gegeben ſein, und man wird nun leicht das Verfahren finden, mittels deſſen man in dieſem Falle die Umklappung A_1 des Punctes A erhält.

§. 75.

Uebungsaufgaben.

1.) Gegeben: Die $\left\{\frac{H}{V}\right\}$-Spur einer Ebene und ihre $\left\{\frac{H}{V}\right\}$-Neigung. Geſucht: Die $\left\{\frac{V}{H}\right\}$-Spur.

2.) Ggb: Die $\left\{\frac{H}{V}\right\}$-Spur einer Ebene und ihre $\left\{\frac{V}{H}\right\}$-Neigung. Geſ.: Die $\left\{\frac{V}{H}\right\}$-Spur.

(Wie verfährt man, wenn in beiden Aufgaben die gegebene Spur dem Grundſchnitte nicht mehr innerhalb des Zeichnungsblattes begegnet?)

§. 76.

Aufg. Durch eine gegebene Gerade AB eine Ebene zu legen, welche gegen eine der Grundebenen eine gegebene Neigung hat.

Digitized by Google

Aufl. Der gegebene Neigungswinkel α beziehe ſich auf die HE.

Fig. 20. Man denke von der V-Spur S′ der gegebenen Linie eine Senkrechte auf die H-Spur der geſuchten Ebene gefällt, ihren Fußpunct P mit s verbunden und das Dreieck S′sP in die VE umgeklappt. In dieſer Lage kann man daſſelbe zeichnen, wenn man $\angle$ sS′P$_1$ = 90° — α macht. Dreht man nun dieſes Dreieck in ſeine urſprüngliche Lage zurück, ſo beſchreibt P$_1$ um s einen Kreis, welcher die geſuchte H-Spur berühren muß, weil dieſe ſenkrecht auf s P ſtehen ſoll. Zieht man daher an den Kreis aus der H-Spur S der gegebenen Geraden eine Tangente SP und verbindet den Punct O, wo ſie den Grundſchnitt trifft, mit S′, ſo iſt SOS′ die verlangte Ebene. Da aber noch eine andere Tangente ST möglich iſt, ſo gewährt die Ebene SMS′ eine zweite Auflöſung.

†) Geht der Kreis um s durch S (d. h. iſt $\alpha = \angle$ S′Ss), ſo giebt es nur eine Auflöſung; gar keine, wenn S vom Kreiſe eingeſchloſſen wird (d. h. wenn $\alpha < \angle$ S′Ss).

Fig. 20. Zuſ. I. Fällt O in zu große Entfernung, ſo lege man eine Ebene QrR′ ſenkrecht zu SP und denke ſich das Dreieck, welches zwiſchen Qr, rR′ und dem Durchſchnitte der QrR′ mit der geſuchten Ebene liegt, in die VE umgeklappt. Da dieſes Dreieck bei Q den Winkel α enthalten muß, ſo hat man rQ$_1$ = rQ und Q$_1$R′ ∥ P$_1$S′ zu machen. Der Schnittpunct R′ liegt dann auf der V-Spur der verlangten Ebene und beſtimmt mit S′ dieſe Spur.

Fig. 21. Zuſ. II. Liegen die Spuren S, S′ der gegebenen Geraden ſehr weit entfernt oder gar nicht mehr im Zeichnungsblatte, ſo denke man ſich aus einem beliebigen Puncte A derſelben eine Senkrechte auf die H-Spur der geſuchten Ebene gezogen, ihren Fußpunct F mit der Projection a verbunden und das Dreieck AaF durch Drehung um Aa in eine zur VE parallele Stellung gebracht, zeichne für dieſe Stellung die V-Projection a′mf$_1$ des Dreiecks (indem man $\angle$ ma′f$_1$ = 90° — α macht) und beſtimme die Stelle F$_1$, welche der Punct F nach jener Drehung einnimmt. Dann iſt der mit aF$_1$ um a beſchrie-

Digitized by Google

bene Kreis der geometriſche Ort des Punctes F, und die H-Spur der geſuchten Ebene muß dieſen Kreis berühren. Wiederholt man das ganze Verfahren für einen zweiten Punct B der gegebenen Geraden, ſo erhält man einen zweiten Kreis (um b), den die geſuchte H-Spur ebenfalls berühren muß und zwar auf der nämlichen Seite, auf welcher der erſte berührt wird. Eine gemeinſchaftliche Tangente beider Kreiſe, welche die Centrallinie nicht ſchneidet, iſt demnach dieſe Spur. Sind F und G die Berührungspuncte (alſo die Fußpuncte der aus A und B auf die H-Spur der Ebene gefällten Senkrechten), ſo erhält man die zugehörige V-Spur, wenn man die V-Projectionen und die V-Spuren F′, G′ der Linien FA und GB beſtimmt und F′G′ zieht.

Man ſieht auch bei dieſer Art der Auflöſung, daß man im Allgemeinen zwei Ebenen erhält; eine einzige erſcheint, wenn einer der um a und b beſchriebenen Kreiſe den andern berührt (was nur im Puncte S geſchehen könnte); gar keine, wenn einer den andern umſchließt.

§. 77.

Aufg. Durch einen gegebenen Punct (a, a′) eine Ebene zu legen, welche gegen die HE unter $\angle\, \alpha$, gegen die VE unter $\angle\, \beta$ geneigt iſt.

Aufl. I. Man denke ſich eine mit der geſuchten parallele Ebene POP′ bereits vorhanden, und führe durch einen und denſelben Punct p des Grundſchnitts zwei Ebenen ſenkrecht zu ihren Spuren. Aus dieſen Ebenen werden durch die POP′ und die Grundebenen zwei rechtwinkelige Dreiecke PpP′ und RpR′ geſchnitten, welche bei P und R′ die Neigungswinkel α und β faſſen. Die Gerade, nach welcher ſich die Dreiecksebenen ſchneiden, geht durch p und ſteht auf POP′ ſenkrecht (§. 2, XII); ſie ſtellt alſo die gemeinſchaftliche Höhe beider Dreiecke vor, wenn man die Hypotenuſen als die Baſen betrachtet. Fig. 22.

Um nun mit Hülfe der Winkel α, β die Spuren einer Ebene wie POP′ auf der Zeichnungsebene wirklich zu finden, ziehe man durch einen beliebigen Punct p des Grundſchnitts

Digitized by Google

eine Gerade R $\mathfrak{R}$ ſenkrecht zu dieſem, mache $\angle pP_oP' = \alpha$ (wobei pP_o beliebig lang), beſchreibe mit der Höhe pF_1 des Dreiecks $P'pP_o$ um p einen Kreis, und lege an ihn eine Tangente R_oR unter dem Winkel β gegen den Grundſchnitt. Dann ſind $P'pP_o$ und RpR_o die Umklappungen der vorhin erwähnten Dreiecke $P'pP$ und RpR'. Die H-Spur der Ebene POP' geht daher durch R und berührt den mit pP_o um p beſchriebenen Kreis; die V-Spur verbindet den Punct P' mit dem Puncte, in welchem die H-Spur den Grundſchnitt trifft, und berührt zugleich den mit pR_o um p beſchriebenen Kreis. Da aber aus R an den Kreis P_oP zwei Tangenten RO und R$\mathfrak{O}$ möglich ſind, ſo kann man ebenſowohl R$\mathfrak{O}$P' als ROP' für die zunächſt geſuchte Ebene nehmen. Da man ferner an den Kreis F_1 $F_{,,}$ ſeine unter $\angle \beta$ gegen den Grundſchnitt geneigte Tangente auch hinter dem Grundſchnitte in der Lage $R_o \mathfrak{R}$ ziehen kann, in welchem Falle man ſtatt des Puncts R den Punct $\mathfrak{R}$ erhält, und aus $\mathfrak{R}$ wieder zwei Tangenten $\mathfrak{R}$O und $\mathfrak{R}\mathfrak{O}$ an den Kreis P_oP gelegt werden können, ſo ergeben ſich noch zwei Ebenen $\mathfrak{R}$OP' und $\mathfrak{R}\mathfrak{O}$P', welche (wie man leicht einſieht) ebenfalls die Winkel α und β mit den Grundebenen bilden *). Man ſieht hieraus daß die Aufgabe im Allgemeinen vier Auflöſungen geſtatten wird. Um ihr völlig zu genügen, hat man nur noch durch den gegebenen Punct (a,a') eine Ebene parallel mit einer der eben gefundenen zu führen.

†) Iſt $\alpha + \beta = 90°$, ſo iſt $\triangle P'pP_o \cong \triangle R_o pR \cong \triangle R_o p\mathfrak{R}$, alſo $pP_o = pR = p\mathfrak{R}$, oder der Kreis P_oP geht durch R und $\mathfrak{R}$. Es iſt daher ſowohl durch R als durch $\mathfrak{R}$ nur eine Tangente an dieſen Kreis mög-

*) Außer den Tangenten R_oR und $R_o\mathfrak{R}$ ließen ſich an den Kreis F_1 $F_{,,}$ noch zwei andere unter der vorgeſchriebenen Neigung ziehen, deren Berührungspuncte in die Quadranten P'pN und NpM fielen. Dieſe würden aber auf keine neue Lage der geſuchten Ebene führen, da ſie offenbar die Gerade $\mathfrak{R}$R wieder in den Puncten R und $\mathfrak{R}$ ſchneiden müſſen.

Digitized by Google

lich, und jede derſelben iſt dem Grundſchnitt parallel. Mithin erhält man für dieſen Fall nur **zwei** Ebenen, deren gemeinſchaftliche V-Spur eine durch P′ mit dem Grundſchnitt parallel gezogene Gerade iſt.

††) Iſt $\alpha + \beta < 90°$ (alſo $\angle F_{,,}pR < \angle F_{,}pP_{0}$), ſo iſt $pR < pP_{0}$; dann liegen R und ℜ innerhalb des Kreiſes $P_{0}P$, und die Auflöſung der Aufgabe wird unmöglich.

Aufl. II. Die Höhen $pF_{,}$ und $pF_{,,}$ der umgeklappten Dreiecke $P'pP_{0}$ und RpR_{0} ſchließen mit den Katheten pP_{0} und pR_{0} die Complemente der Winkel α und β ein. Werden beide Dreiecke in ihre urſprüngliche Lage zurückbewegt, ſo vereinigen ſich $pF_{,}$ und $pF_{,,}$ zu einer auf der Ebene POP′ ſenkrechten Graden pF, deren Projectionen in die mit pP_{0} und pR_{0} identiſchen Katheten pP und pR′ fallen. Demnach wird man die verlangte Ebene auch erhalten, wenn man durch einen beliebigen Punct p des Grundſchnitts eine Gerade pF legt, welche mit ihren Projectionen (oder den Grundebenen) die Winkel $90° - \alpha$ und $90° - \beta$ bildet (§. 71, 2) und ſenkrecht zu ihr eine Ebene durch den gegebenen Punct (a, a′) führt (§. 51).

Man ſieht auch hier, daß vier Auflöſungen möglich ſind, indem die Gerade pF vier verſchiedene Lagen haben kann. Die Zahl derſelben reducirt ſich (nach §. 71, 2) auf zwei, wenn $(90° - \alpha) + (90° - \beta) = 90°$, d. i. $\alpha + \beta = 90°$; und die Aufgabe iſt gar nicht zu löſen, wenn $(90° - \alpha) + (90° - \beta) > 90°$, d. i. $\alpha + \beta < 90°$.

§. 78.

Aufg. Den Winkel zu zeichnen, welcher im Raume von den Spuren OP, OP′ einer gegebenen Ebene eingeſchloſſen wird.

Aufl. Nimmt man auf den Spuren zwei beliebige Puncte P, P′, ſucht die Länge ihrer Verbindungslinie PP′ und conſtruirt aus OP, OP′ und PP′ ein Dreieck, ſo enthält dieſes den verlangten Winkel gegenüber von PP′.

Am einfachſten wird die Conſtruction, wenn man das Dreieck OPP′ rechtwinkelig ſein läßt. Fällt man $P'p \perp GS$ Fig. 23.

Digitized by Google

und pP ⊥ OP, ſo iſt auch PP′ ⊥ OP (vgl. §. 2, X); die horizontale Umklappung des Dreiecks OPP′ ergibt ſich daher, wenn man Pp verlängert und mit OP′ von O aus in P″ durchſchneidet.

§. 79.

Aufg. Den Winkel zwiſchen zwei ſich ſchneidenden Geraden (ab, a′b′), (ac, a′c′) zu zeichnen.

Fig. 24. Aufl. Beſtimmt man die H-Spur ST der Ebene BAC, ſucht die Lage A_1 des Puncts A in der horizontalen Umklappung dieſer Ebene (§. 57) und verbindet A_1 mit den H-Spuren S und T der gegebenen Geraden, ſo iſt SA_1T der geſuchte Winkel. (Eben ſo könnte man die verticale Spur von BAC und ihre verticale Umklappung benützen.)

Liegen die Spuren der gegebenen Geraden ſo, daß die Ausführung dieſer Conſtruction unbequem wird, ſo nehme man willkührlich einen Punct B auf AB und einen zweiten C auf AC, und conſtruire das Dreieck ABC in ſeiner wahren Geſtalt. Zu dem Ende müßte man die Länge der 3 Seiten ſuchen (§. 60). Man kann aber einfacher zum Ziele kommen, wenn man den Punct C ſo gewählt hat, daß er mit dem Puncte B einerlei H- oder V-Diſtanz hat. Denn ſind z. B. die H-Diſtanzen einander gleich, wie in Fig. 24, ſo iſt BC horizontal, und man erhält den geſuchten Winkel, wenn man ſeine Ebene um BC in horizontale Stellung dreht, die H-Projection a_1 des Puncts A nach der Drehung angiebt (§. 59) und a_1 mit b und c verbindet. (Das Dreieck ba_1c muß nämlich dem Dreieck ABC congruent ſein, da bei der horizontalen Lage des letztern ſeine drei Seiten ſich in wahrer Größe projiciren (§. 26)).

Zuſatz. Die Projection eines ſchiefen Winkels wird nur dann der wahren Größe desſelben gleichkommen, wenn ſeine Ebene der Grundebene parallel iſt (in welchem Falle ſeine Schenkel den Schenkeln der Projection parallel ſind). Der rechte Winkel allein kann in unendlich vielen Stellungen ſich wieder als rechter projiciren; in allen denjenigen Stellungen nämlich, wobei ein Schenkel der Grundebene

Digitized by Google

parallel iſt, mithin ſenkrecht auf der projicirenden Ebene des andern Schenkels ſteht.

Umgekehrt: Iſt die Projection eines rechten Winkels ebenfalls ein rechter, ſo muß wenigſtens ein Schenkel der Grundebene parallel ſein. Denn die projicirenden Ebenen beider Schenkel ſchneiden ſich ſenkrecht; und wie auch der eine Schenkel (M) in ſeiner projicirenden Ebene gerichtet ſein mag, ſo liegt immer der andere (N) in einer Ebene E, welche auf dem erſten ſenkrecht ſteht (§. 2, VIII), alſo auch auf der projicirenden Ebene desſelben (§. 2, XI); der Schenkel N (als Durchſchnitt ſeiner projicirenden Ebene mit der Ebene E) ſteht daher ſenkrecht auf der projicirenden Ebene des Schenkels M (§. 2, XII) und iſt mithin der Grundebene parallel.

§. 80.

Uebungsaufgaben.

1.) Die V-Projection einer Linie zu zeichnen, welche mit einer gegebenen Linie einerlei H-Projection hat und jene in einem gegebenen Puncte unter einem gegebenen Winkel ſchneidet.

2.) Ein Winkel iſt durch die Projectionen ſeiner Schenkel gegeben; man ſoll die Projectionen ſeiner Halbirungslinie zeichnen.

3.) Von einem Winkel kennt man die H-Spuren der Schenkel und die Lage der Spitze in der horizontalen Umklappung ſeiner Ebene (mithin auch ſeine Größe). Man ſoll diejenige Lage der Spitze projiciren, bei welcher die H-Projection des Winkels eine gegebene Größe erhält.

§. 81.

Aufg. In der HE durch die H-Spur S einer gegebenen Geraden AS eine andere Gerade zu ziehen, welche mit AS einen gegeben Winkel φ einſchließt.

Aufl. Es ſei SB die verlangte Linie. Wird auf Fig. 25.
ſie aus einem beliebigen Puncte A der AS eine Senkrechte AB gefällt, ſo bildet die Entfernung des Fußpunctes B der

Digitized by Google

letztern von S die Kathete eines Dreiecks, welches die Linie AS zur Hypotenuſe hat und den Winkel φ enthält. Sucht man demnach die Länge von AS (§. 60), ſo findet man auch leicht die Länge BS. Der Punct B muß nun in einem Kreiſe liegen, welcher mit SB um S beſchrieben iſt. Da aber die Gerade, welche ihn mit a verbindet, ſenkrecht auf SB stehen muß (§. 2, X), ſo iſt ſeine Lage auf einen zweiten Kreis beſchränkt, der die Linie aS zum Durchmeſſer hat. Beide Kreiſe ſchneiden ſich in zwei Puncten B_1 und B_2, weshalb es zwei Lagen SB_1 und SB_2 für die geſuchte Linie giebt. (Die Auflöſung wird unmöglich, wenn SB > Sa, d. h. < $\varphi \angle$ ASa iſt).

§. 82.

Aufg. Einen gegebenen Winkel auf den Horizont zu reduciren *) (d. h. die H-Projection eines Winkels zu zeichnen, wenn man ſeine Größe φ und die H-Neigungen α und β ſeiner Schenkel kennt).

Fig. 26. Aufl. Man lege einen Schenkel AC′ des Winkels in die VE (ſo daß alſo AC′ mit dem Grundſchnitt AB_1 den Winkel α bildet), mache $\angle C'B_1c = \beta$ und drehe das rechtwinkelige Dreieck $C'cB_1$ um C′c ſo lange, bis B_1C' mit AC′ den Winkel φ einſchließt; iſt nach dieſer Drehung die Kathete cB_1 in die Lage cB gekommen, ſo iſt BcA die verlangte H-Projection des gegebenen Winkels. Um nun den Punct B wirklich zu finden, bemerke man, daß er in dem Kreiſe B_1B liegen muß, welcher mit cB_1 um c beſchrieben wird, und daß man von dem Dreiecke BAC′ zwei Seiten AC′ und BC′ (=B_1C') nebſt dem zwiſchen ihnen liegenden Winkel φ kennt, alſo die Länge $AB_{,,}$ der dritten Seite AB finden kann. Der Punct B iſt demnach der Durchſchnitt des Kreiſes BB_1 mit einem um A beſchriebenen Bogen vom Halbmeſſer $AB_{,,}$.

§. 83.

Aufg. Die Neigung einer gegebenen Geraden M gegen eine gegebene Ebene E darzuſtellen.

*) Eine für die practiſche Geometrie wichtige Aufgabe.

Aufl. I. Fälle aus einem Puncte A der M eine Senkrechte auf E, projicire deren Fußpunct B, ſo wie den Schnitt C der M und E (§. 45), und conſtruire das rechtwinkelige Dreieck ABC (indem man die Längen zweier Seiten ſucht [§. 60]). Der Winkel an C iſt der verlangte.

Aufl. II. Man fälle aus einem beliebigen Puncte der M eine Senkrechte L auf E und beſtimme den Winkel zwiſchen M und L (§. 79). Dieſer iſt das Complement des geſuchten.

§. 84.

Aufg. Den Neigungswinkel zwiſchen zwei gegebenen Ebenen POP′ und PQP′ zu zeichnen. Fig. 27.

Aufl. I. Man führe ſenkrecht zur Schnittlinie beider Ebenen eine dritte Ebene, und ſuche das Dreieck zu conſtruiren, welches aus letzterer durch die gegebenen und eine Grund-Ebene geſchnitten wird, und das bekanntlich den verlangten Winkel enthält. In dieſer Abſicht kann man entweder beide Projectionen der Schnittlinie PP′ zeichnen, in dieſer einen Punct (a, a′) beliebig wählen, die H Spur BC der durch ihn ſenkrecht zu PP′ gelegten Ebene beſtimmen (§. 51), die Lage A_1 des Punctes (a, a′) in der horizontalen Umklappung dieſer Ebene ſuchen (§. 57) und A_1 mit den Puncten B und C verbinden, in denen BC die OP und QP trifft (und welche die H Spuren der Schenkel des geſuchten Winkels ſein müſſen). Oder man zeichnet nur die H-Projection Pp der PP′, nimmt eine beliebige auf Pp Senkrechte BC als H-Spur einer auf PP′ ſenkrechten Hülfsebene an, und beſtimmt in der horizontalen Umklappung derſelben die Lage A_1 des Puncts A, in welchem ſie der PP′ begegnet, auf folgende Weiſe. Die Ebene BAC wird von der projicirenden Ebene PpP′ nach einer Geraden DA geſchnitten, welche auf PP′ ſenkrecht iſt. Klappt man nun das Dreieck PpP′ in die HE nach $PpP_{,,}$ um und fällt $DA_{,,}$ ſenkrecht auf $PP_{,,}$, ſo giebt $DA_{,,}$ die Entfernung des Punctes A von D an; und da die Umklappung A_1 in die Richtung von Pp fallen muß, ſo mache man $DA_1 = DA_{,,}$; dann iſt BA_1C die Größe des geſuchten Winkels. (Bei andern Lagen der gegebenen

Digitized by Google

Ebenen kann es bequemer ſein, die Vertical-Spur der auf PP′ ſenkrechten Schnittebene den Conſtructionen auf ähnliche Weiſe zu Grunde zu legen, wie es hier mit der H-Spur geſchah).

Fig. 28. †) In Fig. 28. ſind die V-Spuren parallel. Legt man durch die H-Spur P ihrer Schnittlinie eine Ebene PpP″ ſenkrecht zu dieſer, und giebt in der verticalen Umklappung dieſer Ebene die Lage P_1 des Punctes P an, ſo iſt $P'P_1P''$ der geſuchte Winkel. (Eben ſo könnte man auch die horizontale Umklappung der Ebene PpP″ benützen).

Aufl. II. Man fälle aus einem beliebigen Puncte Senkrechte auf die gegebenen Ebenen (§. 50) und beſtimme deren Winkel (§. 79). Dieſer iſt das Supplement des geſuchten. *)

§. 85.

Aufg. Zu entſcheiden, ob zwei gegebene Ebenen ſenkrecht auf einander ſtehen oder nicht.

Aufl. Man könnte die vorige Aufgabe löſen und zuſehen, ob der gefundene Winkel ein rechter iſt. Auf ein viel kürzeres Verfahren aber leitet die Bemerkung, daß zwei Ebenen ſich nur dann unter rechten Winkeln ſchneiden, wenn man in der einen eine Gerade ſenkrecht zur andern ziehen kann. Legt man nämlich durch einen beliebigen Punct in der H-Spur der einen Ebene eine Senkrechte zur andern (§. 50) und beſtimmt die V-Spur derſelben, ſo muß dieſe in die V-Spur der erſten Ebene fallen, wenn beide Ebenen ſenkrecht aufeinander ſein ſollen.

---

*) Der Winkel beider Senkrechten könnte auch ſogleich für die geſuchte Neigung gelten, da zwei Ebenen immer zwei Winkel mit einander einſchließen, welche ſich zu 180° ergänzen. Eben ſo könnte man ſtatt des durch die erſte Auflöſung gefundenen Neigungswinkels ſein Supplement nehmen. Um Zweideutigkeiten zu umgehen, müßte man etwa übereinkommen, immer den ſpitzen Winkel als Maß der Neigung zu betrachten, wie früher bei Beſtimmung der Grund-Neigungen einer Ebene angenommen wurde.

Digitized by Google

§. 86.

Uebungsaufgabe. Die Spuren einer Ebene und eine Projection einer in ihr liegenden Geraden ſind gegeben. Man ſuche die Spuren einer andern Ebene, welche die gegebene nach jener Geraden unter einem gegebenen Winkel ſchneidet.

§. 87.

Aufg. Durch eine gegebene Gerade AB eine Ebene zu legen, welche eine gegebene Ebene POP′ unter einem gegebenen Winkel φ ſchneidet.

Aufl. Für jede Spur der geſuchten Ebene hat man einen Punct, wenn man die beiden Spuren der gegebenen Geraden AB angiebt; die Lage der Ebene wird daher völlig beſtimmt ſeyn, ſobald noch ein Punct bekannt iſt, welcher in einer ihrer Spuren liegt, und als ein ſolcher dritter Punct bietet ſich zunächſt eine von den Spuren der Linie z dar, nach welcher die geſuchte und die gegebene Ebene ſich ſchneiden. Die folgende Betrachtung wird lehren, wie man zur H-Spur T dieſer Linie gelangt.

Es ſei B der Schnitt der gegebenen Linie und der gegebenen Ebene, A ein beliebiger Punct der erſtern, C der Fußpunct einer von ihm auf die gegebene Ebene gefällten Senkrechten. Betrachtet man für einen Augenblick die Ebene POP′ als eine Grundebene, ſo müßte B als Spur der AB, C als Projection von A gelten und die Spur z der geſuchten Ebene auf der Grundebene POP′ würde man (nach §. 76) erhalten, wenn man von B aus eine Tangente an einen um C beſchriebenen Kreis zöge, deſſen Halbmeſſer die Kathete eines Dreiecks wäre, welches die Diſtanz AC als andere Kathete und φ als Gegenwinkel der letztern hat. Obgleich man dieſen Halbmeſſer zeichnen kann (da ſich die Länge von AC nach §. 60 finden läßt), ſo wird doch die Ausführung der angegebenen Conſtructionen nur dann möglich, wenn die Ebene POP′ mit den Puncten B und C wirklich in eine Grundebene, etwa in die HE, umgeklappt iſt. Hat man die Lage der Linie z in der horizontalen Umklappung gefunden, ſo könnte man ſie leicht

Digitized by Google

in ihre wahre Lage im Raume bringen; dieß iſt aber unnöthig, da es ſich hier nur um den Punct P handelt, in welchem ſie die OP ſchneidet, und dieſer Punct bei Drehung der Ebene POP′ ſich nicht ändern kann.

Die Aufgabe geſtattet im Allgemeinen **zwei** Auflöſungen.

§. 88.

Aufg. **In einer gegebenen Ebene POP′ durch den Punct B, in welchem ihr eine gegebene Gerade AB begegnet, eine Gerade zu ziehen, welche mit AB einen gegebenen Winkel φ bildet.**

Aufl. Man beſtimme den Fußpunct C und die Länge AC einer Senkrechten, welche aus einem beliebigen Puncte A der gegebenen Geraden auf die Ebene gefällt iſt, und ſuche die Lagen B_1, C_1 der Puncte B, C nach horizontaler Umklappung der Ebene. Denkt man ſich während der Drehung der letzteren die Gerade AB feſt mit ihr verbunden, ſo ändert dieſe ihre Lage ſo, daß zuletzt B_1 als ihre H-Spur, C_1 als H-Projection eines ihrer Puncte, AC als H-Diſtanz deſſelben erſcheint. In der umgeklappten Ebene kann man demnach die geſuchte Linie nach §. 81 zeichnen; und da die H-Spur der letztern (der Punct, wo ſie die OP trifft) während des Zurückdrehens der Ebene unbeweglich bleibt, ſo laſſen ſich auch die Projectionen ihrer wahren Lage angeben.

Drittes Kapitel.

Ueber Raumecke.

§. 89.

Wird von mehreren Geraden, welche von einem gemeinſchaftlichen Puncte ausgehen und in demſelben einſeitig begrenzt ſind, die erſte mit der zweiten, die zweite mit der dritten, ..., die letzte mit der erſten durch eine Ebene

verbunden, ſo entſteht ein **Raumeck** (körperliches Eck, Körperwinkel, Vielkant). Jene Geraden ſind ſeine **Kanten**, ihr Vereinigungspunct ſeine **Spitze**; der Winkel zweier benachbarten Kanten heißt eine **Seite** — die Neigung zwiſchen zwei benachbarten Ebenen ein **Winkel** des Ecks.

Das **dreikantige** Eck (Raumdreieck, körperliche Dreieck, Dreikant) iſt das einfachſte unter den Raumecken und zugleich das wichtigſte, da ſich mehrkantige immer in dreikantige zerlegen laſſen.

§. 90.

Werden die Kanten eines Dreikants über die Spitze hinaus rückwärts verlängert, ſo beſtimmen dieſe Verlängerungen ein neues Dreikant, welches das **Scheiteldreikant** des erſtern heißt. Zwei Scheiteldreikante ſtimmen offenbar in allen Seiten und Winkeln überein, können aber dennoch nie zur Deckung gebracht, ſondern nur zu ſymmetriſcher Stellung aneinander gelegt werden. Man ſieht hieraus, daß man aus der Gleichheit der Seiten und Winkel in zwei Dreikanten noch nicht auf ihre Congruenz ſchließen darf. Die Bedingung, welche außerdem noch zur Congruenz erfüllt werden muß, iſt, daß die gleichen Stücke in beiden Dreikanten nach derſelben Ordnung in einerlei Richtung auf einander folgen; iſt dieſe Richtung in beiden entgegengeſetzt, ſo ſind ſie **ſymmetriſch**.

§. 91.

Die Ebene zweier Geraden, welche aus einem beliebigen Puncte innerhalb eines Dreikants auf zwei Seiten deſſelben gefällt ſind, ſteht ſenkrecht auf der zwiſchen dieſen Seiten liegenden Kante, und der Winkel zwiſchen beiden Senkrechten iſt das Supplement des Dreikantwinkels, welcher von den genannten Seiten eingeſchloſſen wird. Fällt man aus dem nämlichen Puncte auch auf die dritte Seite eine Senkrechte und verbindet ſie mit den beiden vorigen durch Ebenen, ſo wird ein neues Dreikant gebildet, in welchem die eben ausgeſprochenen Sätze für jedes Kantenpaar gelten.

Digitized by Google

Die Winkel des erſten Dreikants werden alſo durch die Seiten des zweiten ſupplirt; aber auch die Winkel des zweiten durch die Seiten des erſten, da die Kanten des erſten auf den Seitenebenen des zweiten ſenkrecht ſind. Jedes der beiden Dreikante heißt das Supplementardreikant des andern.

§. 92.

Aus drei gegebenen Stücken eines Dreikants laſſen ſich die übrigen drei durch Conſtruction finden. Es bieten ſich hier ſechs verſchiedene Fälle dar, von denen ſich jedoch je zwei auf dieſelbe Weiſe behandeln laſſen, wenn man das Supplementardreikant beizieht.

Aufgaben.

Drei Stücke eines Dreikants ſind gegeben; man ſoll die übrigen Stücke finden.

§. 93.

I. Ggb: Die drei Seiten α, β, γ.

Fig. 29. Aufl. Das Dreikant wird aus ſeinen drei Seiten conſtruirt, wenn man dieſe in einer Ebene (welche man als HE betrachten kann) aneinander legt, wie Fig. 29 zeigt, und die beiden äußern Seiten β und γ ſo lange um die Kanten SC und SB dreht, bis die Linien SA_1 und SA_2 zu einer einzigen Geraden zuſammenfallen, welche dann die dritte Kante SA des Dreikants iſt. In SA_1 und SA_2 hat man alſo zwei umgeklappte Lagen der letztern. Iſt nun $SA_1 = SA_2$, ſo ſind die Puncte A_1 und A_2 Umklappungen eines und desſelben Punctes A, deſſen H-Projection a der Durchſchnitt der beiden Senkrechten A_1C und A_2B ſein muß, welche man aus A_1 und A_2 auf SC und SB fällt; denn dieſe Senkrechten ſind offenbar die H-Projectionen der beiden Kreisbögen, welche von den Puncten A_1 und A_2 während obenerwähnter Drehung der Seiten β und γ beſchrieben werden. Nach Vereinigung der Puncte A_1 und A_2 in A ſtellen ſich zwei rechtwinkelige Dreiecke ABa und ACa dar, welche bei B und C die Gegenwinkel von β und γ faſſen und leicht

Digitized by Google

gezeichnet werden können, da man von jedem eine Kathete und die Hypotenuſe kennt. Macht man $aA_3 \perp aC$, $CA_3 = CA_1$ ſo iſt A_3Ca die Umklappung des einen Dreiecks, und ähnlich ergiebt ſich die Umklappung A_4Ba des andern. (Probe: $aA_3 = aA_4$). — Um auch den dritten Winkel des Dreikants zu erhalten, mache man $A_1M \perp SA_1$, $A_2N \perp SA_2$ und klappe das Dreieck AMN, welches ſich nach Vereinigung der Puncte A_1 und A_2 bildet und bei A den fraglichen Winkel enthält, in die HE um, indem man $MA_5 = MA_1$ und $NA_5 = NA_2$ macht.

†) In dem vorliegenden Dreikante wurden die drei Seiten ſpitz angenommen. Man überzeugt ſich aber leicht, daß die angegebenen Conſtructionen auch für jene Fälle paſſen, in denen eine oder zwei oder auch alle drei Seiten ſtumpf ſind; nur hat man, ſobald a jenſeits S fällt, für die Winkel B und C die Nebenwinkel der in die Dreiecke A_3Ca und A_4Ba geſchloſſenen Winkel gelten zu laſſen.

Zuſatz I. Nach obiger Conſtruction erhält man zwei Dreikante, da man den in a projicirten Punct A ſowohl oberhalb als unterhalb der HE gelegen annehmen kann. Beide Dreikante ſtimmen in allen ſechs Stücken überein, ſind aber nicht congruent (den einzigen Fall ausgenommen, wo $\beta = \gamma$), ſondern ſymmetriſch.

Zuſatz II. Ein Dreikant iſt aus drei gegebenen Seiten nur dann möglich, wenn 1.) ihre Summe $< 360°$ und 2.) die größte kleiner als die Summe der beiden andern iſt. Werden dieſe Bedingungen nicht erfüllt, ſo laſſen ſich die Dreiecke A_3Ca und A_4Ba nicht conſtruiren, da ihre Hypotenuſen kleiner als die Katheten aC und aB ſind.

Zuſatz III. Hat ein Dreikant zwei gleiche Seiten, ſo ſind auch die beiden Gegenwinkel dieſer Seiten gleich. Sind alle drei Seiten gleich, ſo ſind auch alle drei Winkel gleich.

§. 94.

II. Ggb.: Zwei Seiten α, β und der eingeſchloſſene Winkel C.

Digitized by Google

Fig. 29. Aufl. Man lege die Seiten α und β in der HE aneinander, wie in Fig. 29, ſchneide SC ſenkrecht durch eine Gerade A_1Ca und drehe β ſo lange um SC, bis A_1C mit Ca den gegebenen Winkel C einſchließt. Bezeichnet A die Lage, welche der Punct A_1 nach vollendeter Drehung einnimmt, a die Projection derſelben, ſo iſt ACa ein rechtwinkeliges Dreieck, deſſen Umklappung A_3Ca ſich ergiebt, wenn man $\angle aCA_3 = \angle C$, $CA_3 = CA_1$ und $A_3a \perp Ca$ macht. Hiernach iſt der Punct A mittels ſeiner H-Projection a und ſeiner H-Diſtanz aA_3 beſtimmt, alſo auch die Lage der Kante AS. Letztere verbinde man mit SB durch eine Ebene, und klappe dieſe ebenfalls in die HE um. Die Lage A_2 des Puncts A in dieſer neuen Umklappung wird gefunden, wenn man $aA_2 \perp SB$ und $SA_2 = SA_1$ macht. Verbindet man A_2 mit S, ſo iſt $\angle BSA_2 = \gamma$. Die übrigen geſuchten Stücke erhält man nun, nachdem die drei Seiten bekannt ſind, wie in §. 93.

(Wie vereinfacht ſich die Löſung, wenn der gegebene Winkel ein rechter iſt?)

(Man löſe dieſe und die folgenden Aufgaben auch unter veränderten Umſtänden, indem man eines oder zwei der gegebenen Stücke oder endlich alle drei ſtumpf annimmt.)

§. 95.

III. Ggb: Zwei Seiten α, β und der Gegenwinkel B der letztern.

Fig. 30. Aufl. Legt man unter dem Winkel B gegen die Seite α eine Ebene E durch eine Kante SB der letztern und denkt die Seite β um die andere Kante SC gedreht, ſo wird das fragliche Dreikant gebildet ſein, ſobald die freie Kante von β in jene Ebene E fällt. Nun betrachte man die Ebene der Seite α als HE, zeichne die horizontale Umklappung CSA_1 der Seite β, nehme die VE ſenkrecht zu SC an, beſtimme die V-Spur DE′ der vorhin erwähnten Ebene E (§. 75, 1) und ziehe den Kreis A_1A', welcher in der VE von dem Puncte A_1 beſchrieben wird, während die Seite β ſich um SC dreht. Iſt im Verlaufe dieſer Bewegung A_1 in DE′

angekommen, ſo muß die Kante SA_1 in die Ebene SDE' gefallen ſein; daher giebt der Schnitt A' des Kreiſes A_1A' und der Geraden DE' die B-Spur für die wahre Lage der in SA_1 umgeklappten Kante, und das Dreieck DSA' enthält die dritte Seite γ des Dreikants. Zeichnet man demnach die Umklappung DSA_2 jenes Dreiecks (indem man $DA_2 = DA'$ und $SA_2 = SA_1$ macht), ſo hat man in DSA_2 die Größe der Seite γ. Die Winkel A und C des Dreikants findet man nun wie in §. 93.

Der Kreis A_1A' wird die DE' noch in einem zweiten Puncte A'' ſchneiden, welcher entweder mit A' auf einerlei Seite von D liegen kann (wie in Fig. 30), oder auf der entgegengeſetzten. Im erſtern Falle (welcher eintritt, wenn $CA < CD$, d. i. $\beta < \alpha$) führt die Conſtruction auf ein zweites Dreikant mit den gegebenen Stücken, alſo auch auf einen zweiten Werth $DSA_{,,}$ von γ; im andern Falle würde das neue Dreikant zwar die gegebenen Seiten α und β, aber ſtatt des Winkels B deſſen Nebenwinkel enthalten, weshalb es unbeachtet bleiben muß. Fallen die beiden Puncte A' und A'' zuſammen (d. h. berührt der Kreis die Gerade DE', oder iſt $CA' \perp DE'$), ſo iſt die Ebene SCA' ſenkrecht auf DE' (§. 24), alſo auch auf der Ebene SDE' (§. 2, XI), oder der Winkel β des Dreikants iſt ein rechter. Erreicht der Kreis die Gerade nicht, ſo iſt aus den gegebenen Stücken kein Dreikant möglich.

§. 96.

IV. Ggb: Eine Seite α und die beiden anliegenden Winkel B, C.

Aufl. Durch Einführung eines Supplementardreikants läßt ſich dieſe Aufgabe gleich der des §. 94 löſen. Man conſtruirt ein Dreikant, in welchem zwei Seiten die Werthe $180° - A$ und $180° - B$ haben, während der von ihnen eingeſchloſſene Winkel $180° - \alpha$ beträgt. Die Supplemente der gefundenen Winkel ſind dann die geſuchten Seiten; das Supplement der gefundenen dritten Seite iſt der geſuchte Winkel.

Digitized by Google

Fig. 29. Es iſt aber auch eine einfache Löſung ohne Hülfe des Supplementardreikants möglich. Zeichnet man nämlich zwei rechtwinkelige Dreiecke $B_1 a_{,,} A_{,,}$ und $C_1 a_1 A_{,,,}$, welche eine Kathete ($A_{,,,} a_1 = A_{,,} a_{,,}$) gemein haben und dieſer gegenüber die Winkel B und C faſſen, und denkt dieſe Dreiecke ſo an den Kanten von α hingewiegt, daß ihre Ebene ſtets ſenkrecht auf dieſen Kanten SB und SC ſtehen, die Eckpuncte B_1 und C_1 nicht aus den Kanten und die Katheten $B_1 a_{,,}$, $C_1 a_1$ nicht aus der Ebene α weichen, ſo wird endlich einmal $A_{,,,} a_1$ mit $A_{,,} a_{,,}$ zuſammenfallen, und der Punct A, in welchem $A_{,,,}$ und $A_{,,}$ ſich vereinigen, beſtimmt mit S die dritte Kante des Dreikants. Bei jener Bewegung beſchreiben die Projectionen a_1 und $a_{,,}$ zwei Gerade $a_1 a$ und $a_{,,} a$, welche mit SB und SC in den Entfernungen $B_1 a_{,,}$ und $C_1 a_1$ parallel ſind; ihre Vereinigung geſchieht alſo in a, wo $a_1 a$ und $a_{,,} a$ ſich ſchneiden. Fällt man nun $aA_2 \perp SB$, $aA_1 \perp SC$, macht $BA_2 = B_1 A_{,,}$, $CA_1 = C_1 A_{,,,}$, zieht SA_2, SA_1, ſo hat man die beiden übrigen Seiten β und γ des Dreikants. (Probe: $SA_2 = SA_1$). Den dritten Winkel findet man wie in §. 93.

§. 97.

V. Ggb: Eine Seite β, ein anliegender Winkel C und der Gegenwinkel B.

Aufl. Die Aufgabe kann mit Hülfe eines Supplementardreikants auf §. 95 zurückgeführt oder auch direct auf folgende Weiſe gelöſt werden.

Fig. 31. Man lege die Seite β in die HE und nehme die VE ſenkrecht zur Kante SC an. Dreht man dann β um SC, bis ſie gegen die HE unter dem Winkel C geneigt iſt, ſo beſchreibt A_1 in der VE einen Kreis um C und kommt nach A′ ſo zu liegen, daß $\angle MCA' = \angle C$. Nun ſind A′ und S die Spuren der Kante SA; und um das Dreikant vollens zu conſtruiren, hat man durch SA′ eine Ebene zu führen, welche die HE unter $\angle B$ ſchneidet (§. 76). Iſt SM ihre H-Spur, ſo iſt MSC = α; die dritte Seite iſt in der Umklappung MSA_2 des Dreiecks MSA′ enthalten, und der dritte Winkel ergiebt ſich wie in §. 93.

Digitized by Google

Iſt $\angle B > \angle C$, ſo laſſen ſich aus den gegebenen Stücken zwei Dreikante conſtruiren, in denen die geſuchten Stücke verſchiedene Werthe haben.

§. 98.

VI. Ggb: Die drei Winkel A, B, C.

Aufl. wie in §. 93, indem man auf das Supplementarbreikant übergeht.

Zuſatz. Nach §. 93, Zuſ. II. laſſen die gegebenen Winkel nur dann ein Dreikant zu, wenn

1.) $(180° - A) + (180° - B) + (180° - C) < 360°$

d. h. $A + B + C > 180°$

2.) $(180° - C) < (180° - A) + (180° - B)$

d. h. $A + B - C < 180°$,

wo C den kleinſten der drei gegebenen Winkel bezeichnet.

§. 99.

Bei ſolchen Aufgaben der deſcriptiven Geometrie, welche unter den gegebenen Größen Winkel enthalten, geſchieht es nicht ſelten, daß die Löſung ſich der Hauptſache nach auf die Conſtruction eines Dreikants zurückbringen läßt; und da man dieſe Conſtruction immer auf einem Nebenblatte ausführen kann, ſo wird in ſolchen Fällen das Zeichnungsblatt ſelbſt frei bleiben von einer Anhäufung der Linien, welche leicht Verwirrung herbeiführt. Als Beiſpiele mögen ein paar Aufgaben der Art hier Platz finden, nebſt Andeutungen zu ihrer Löſung.

§. 100.

Aufg. Es ſind die beiden Projectionen einer Geraden AB und die H-Projection bc einer andern gegeben, welche die erſte unter einem gegebenen Winkel φ ſchneidet. Man ſucht die V-Projection der letztern. *)

*) Um dieſe Aufgabe ohne Hülfe des Dreikants zu löſen, hätte man folgenden Weg einzuſchlagen:

Schneidet eine zu AB ſenkrecht gelegte Ebene S dieſe im Puncte D und die Linie BC im Puncte X, ſo entſteht ein

Fig. 32. Die Gerade BC, deren V-Projection geſucht wird, beſtimmt mit BA und Bb ein Dreikant, in welchem man die Seite ABC = φ und deren Gegenwinkel AbC kennt; eine zweite Seite ABb wird gefunden, wenn man das Dreieck ABb in die HE umklappt. Sucht man (nach §. 95) die dritte Seiten bBC dieſes Dreikants, ſo kann das Dreieck BbC conſtruirt werden, wodurch man die Länge von bC erhält. Durch dieſe Länge iſt die Lage des Puncts C, mithin auch der Projection b′ c′ beſtimmt. (Da die Seite bBC zwei Werthe annehmen kann, ſo iſt b′c′ zweier verſchiedener Lagen fähig.)

§. 101.

Aufgabe. Eine Ebene zu finden, welche durch einen gegebenen Punct geht und mit zwei gegebenen Ebenen gegebene Winkel bildet.

Fig. 33. Aufl. Die gegebenen Ebenen ſeien POP′ und PQP′; die geſuchte neige ſich gegen die erſte unter ∠ φ, gegen die zweite unter ∠ ψ. Denkt man durch einen beliebigen Punct W

---

bei D rechtwinkeliges Dreieck BDX, welches bei B den gegebenen Winkel φ (oder ſein Supplement) enthält, und conſtruirt werden kann, wenn man die Projectionen von D und die wahre Länge von DB ſucht. Denkt man ſich nun die Ebene S in die HE umgeklappt, ſo iſt der geometriſche Ort für die Umklappung von X der Kreis K, der mit dem Halbmeſſer DX um die Umklappung von D beſchrieben werden kann; der Punct X muß aber zugleich in der Geraden G liegen, nach welcher die Ebene S von der horizontalprojicirenden Ebene der BC geſchnitten wird, ſeine Umklappung alſo in der Umklappung von G; und da man die G leicht projiciren und mit der Ebene S umklappen kann, ſo findet man die Umklappung von X als Schnitt der umgeklappten Ebene G und des Kreiſes K. Aus dieſer Umklappung des Punctes X laſſen ſich nun ſehr einfach die Projectionen deſſelben und alſo auch die geſuchte V-Projection der BC beſtimmen. (Da der Kreis K die umgeklappte G zweimal ſchneiden kann, ſo ſieht man, daß zwei Auflöſungen möglich ſind.)

Digitized by Google

in der Schnittlinie der gegebenen Ebenen eine mit der geſuchten parallele Ebene VWR, ſo bildet ſich ein Dreikant, deſſen Kanten WP, WR, WV, deſſen Winkel φ, ψ und der (nach §. 84 zu findende) Neigungswinkel der gegebenen Ebenen ſind. Von dieſem Dreikant ſuche man (nach §. 98) die Seiten PWR und PWV, welche den Winkeln φ und ψ gegenüber liegen. Beſtimmt man hierauf die Lage des Punctes W und der Geraden PW nach horizontaler Umklappung der Ebene POP′ und zieht durch die Umklappung von W in der HE eine Gerade unter der Neigung PWV gegen die Umklappung von PW, ſo ergiebt ſich der Punct V. Auf ähnliche Weiſe findet man (nach horizontaler Umklappung von PQP′) den Punct R; und nun iſt nur noch übrig, daß man durch VR und W eine Ebene führe (§. 47) und durch den gegebenen Punct eine parallele mit ihr.

Im Allgemeinen wird man **vier** Auflöſungen erhalten.

§. 102.

Zur Uebung: Man ſuche für folgende bereits früher abgehandelte Aufgaben neue Auflöſungen, welche ſich auf Conſtruction von Dreikanten ſtützen.

Aufg.	in	§. 71	(lösbar nach	§. 95).
"	"	§. 76	"	§. 97).
"	"	§. 77	"	§. 98).
"	"	§. 81	"	§. 95).
"	"	§. 82	"	§. 93).
"	"	§. 84	"	§. 93 od. §. 94 od. §. 95 od. §. 96.)

§. 103.

Wird um die Spitze irgend eines Raumecks mit einem beliebigen Halbmeſſer eine Kugel beſchrieben, ſo ſchneiden die Seitenebenen des erſtern auf letzterer ein ſphäriſches Polygon aus, welches das Raumeck in der Art repräſentirt, daß die Seiten und Winkel des Raumecks durch die Seiten und Winkel des Polygons gemeſſen werden. So kann z. B. jedes Dreikant durch ein ſphäriſches Dreieck dargeſtellt werden, und

umgekehrt; woraus man erſieht, daß mit der Auflöſung des Dreikants zugleich die graphiſche Auflöſung der Aufgaben der ſphäriſchen Trigonometrie gelehrt iſt. *)

§. 104.

Fig. 34. Die Auflöſung eines mehrkantigen Raumecks läßt ſich auf die Auflöſung des dreikantigen zurückführen, wenn man jenes durch Diagonalebenen in mehrere Dreikante zerlegt. Es ſeien z. B. von einem Vierkant EFGH die vier Seiten und der Winkel E zwiſchen zweien derſelben gegeben. (Der einfacheren Zeichnung willen iſt in Fig. 34 das Vierkant durch ein ſphäriſches Viereck vertreten). Die Diagonalebene FH ſcheidet daſſelbe in zwei Dreikante, von denen ſich zunächſt EHF nach §. 94 conſtruiren läßt. Iſt die dritte Seite FH gefunden, ſo ergeben ſich die Winkel G, v, w des Dreikants FGH nach §. 93; und da die Winkel x und y ſchon aus der Conſtruction des erſtern Dreikants bekannt ſind, ſo hat man auch die Winkel $F = y + w$ und $H = v + w$, folglich alle Stücke des Vierkants EFGH.

---

*) Was für das Dreikant das Supplementardreikant, das iſt für das ſphäriſche Dreieck das Polardreieck. Um dieſe Übereinſtimmung klar zu ſehen, darf man nur das Supplementardreikant ſo verrücken, daß ſeine Spitze mit der des urſprünglichen Dreikants zuſammenfällt, und dann ſtatt des Supplementardreikants ſelbſt ſein Scheiteldreikant (§. 90) nehmen. Nun wird eines der ſich ſupplirenden Dreikante vom andern umſchloſſen; und wenn man um die gemeinſchaftliche Spitze die Kugel beſchreibt, ſo entſtehen zwei ſphäriſche Dreiecke, deren jedes durch ſeine Eckpuncte die Pole für die Seiten des andern angiebt.

Digitized by Google

Viertes Kapitel.

Veränderung des Grundſyſtems.

§. 105.

Die Einfachheit der Auflöſung einer Aufgabe iſt in ſehr vielen Fällen durch die Lage bedingt, welche die gegebenen Größen gegen die Grundebenen haben. Wenn nun die gegenſeitige Stellung dieſer Größen auf andere Weiſe, als mittels der Projectionsmethode, ausgeſprochen iſt, und man dieſelben erſt, behufs der Auflöſung, auf beliebige Grundebenen zu projiciren hat, ſo wird man die letztern immer ſo wählen, daß die auszuführenden Conſtructionen wenigſt verwickelt werden. (Beiſpiele davon ſpäter). Sind aber die gegebenen Größen ſchon durch ihre Projectionen oder Spuren auf zwei Grundebenen dargeſtellt, deren Lage den eben berührten Vortheil nicht gewähren, ſo iſt es nicht ſelten von Nutzen, dieſe urſprünglichen Grundebenen mit einem andern Paare zu vertauſchen, oder wenigſtens einer von ihnen eine andere Stellung zu geben. Eine Aenderung des Grunſyſtems kann ferner auch in ſolchen Fällen zu ſtatten kommen, wo man ſich durch die Grenzen des Zeichnungsraumes in den Conſtructionen beſchränkt ſieht. Es iſt daher nöthig, die Operationen kennen zu lernen, mittels deren man die Projectionen oder Spuren einer Raumgröße aus einem Grundſyſteme in ein anderes übertragen kann, deſſen Stellung gegen das erſte bekannt iſt. Die neuen Grundebenen ſollen hier zunächſt immer wieder in rechtwinkeliger Verbindung angenommen werden, obgleich in einzelnen Fällen die Einführung eines ſchiefwinkeligen Grundſyſtems und ſchiefer Projectionsſtrahlen, manchmal wohl auch die Anwendung der Centralprojection, auf einfache und ſchöne Auflöſungen leitet.

Parallele Verrückung einer Grundebene.

§. 106.

Es ſeien a, a′ die Projectionen eines Puncts A auf zwei Grundebenen, denen der Grundſchnitt mn entſpricht. Fig. 35.

Wird hier die HE um ein Stück mm über ihre urſprüngliche Lage erhoben, ſo daß mn als neuer Grundſchnitt erſcheint, ſo kann ſich offenbar weder die V-Projection noch die V-Diſtanz des Puncts A ändern. Macht man daher ma = ma, ſo ſind a, a′ die neuen Projectionen des Puncts. Beſtimmt man eben ſo die neuen Projectionen b, b′ eines zweiten Punctes B, welcher urſprünglich in b und b′ projicirt war, ſo ſieht man, daß eine Gerade AB ihre V-Projection a′b′ beibehalten, zur H-Projection aber die mit ab parallele ab erhalten wird.

Sind PO, OP′ die urſprünglichen Spuren einer Ebene, ſo fällt in die Augen, daß nach Einführung der neuen HE mn die Lage der V-Spur OP′ dieſelbe bleibt, die neue H-Spur aber durch den Punct O gehen muß. Da nun im Raume die letztere mit mn denſelben Winkel bildet, wie OP mit mn, ſo werden auch nach dem Zurückklappen der VE die Winkel mOP und mOP gleich ſein, oder OP und OP ſind parallel. Die Beſtimmung der neuen H-Spur OP hat demnach keine Schwierigkeit.

Auf ähnliche Weiſe verſetzt man Projectionen und Spuren aus einem Grundſyſtem in ein anderes, welches einerlei HE mit dem erſten und eine mit der urſprünglichen parallele VE hat.

§. 107.

Um ſogleich an einem einfachen Beiſpiele zu zeigen, wie die parallele Verrückung einer Grundebene nützlich werden kann, ſoll die Schnittlinie zweier Ebenen projicirt werden, deren H-Spuren ſich erſt außerhalb des Zeichnungsblattes ſchneiden. Statt des in §. 44 (Zuſ.) für einen ſolchen Fall gelehrten Verfahrens kann man ſich nun des folgenden bedienen:

Fig. 36. Man lege eine neue HE ſo, daß die auf ihr erſcheinenden Spuren PO, PQ ſich noch innerhalb des Blattes begegnen und zeichne die Projectionen P′p′, Pp der Schnittlinie für das neue Grundſyſtem. Geht man dann wieder auf das erſte Syſtem zurück, ſo behält die V-Projection P′p′ ihre Stelle; die H-Projection aber geht jetzt durch p und läuft mit Pp parallel, iſt alſo völlig beſtimmt.

Digitized by Google

Einführung einer neuen $\left\{ {V \atop H} \right\}$-Ebene, welche der urſprünglichen nicht parallel iſt. *)

§. 108.

Aendert man an einem Grundſyſteme blos die VE Fig. 37.
und behält die HE bei, ſo gelten alle urſprünglich gegebenen H-Projectionen und H-Spuren unverändert fort. Ferner iſt die H-Diſtanz eines Puncts völlig unabhängig von der Stellung der VE und wird ſich alſo in allen möglichen V-Ebenen immer in gleicher Größe abbilden. Iſt daher mO der Grundſchnitt des erſten, m𝔒 der des neugebildeten Syſtems, ſo erhält man die neue V-Projection 𝔞' eines Puncts, deſſen urſprüngliche Projectionen a und a' waren, wenn man

a𝔞' ⊥ m𝔒 (§. 7) und

m𝔞' = ma'

macht. Hiernach läßt ſich auch leicht die neue V-Projection einer auf dem erſten Syſteme gegebenen Geraden finden.

Die neue V-Spur einer Ebene POP' muß durch den Punct 𝔒 gehen, wo m𝔒 und PO zuſammentreffen. Um nun einen zweiten Punct derſelben zu finden, bemerke man, daß nach dem Zurückklappen der neuen VE die Gerade pP', nach welcher ſich beide V-Ebenen ſchneiden, im Puncte p ſenkrecht auf m𝔒 erſcheinen, und der Punct P', wo jene Gerade von der Ebene POP' getroffen wird, ſeine Entfernung von p behalten muß. Macht man daher

p𝔓' ⊥ m𝔒 und

p𝔓' = pP',

ſo iſt 𝔓'𝔒 die neue Spur.

§. 109.

Seitenebene.

Unter den verſchiedenen Stellungen, welche man der neuen VE geben kann, iſt diejenige beſonders hervorzu-

*) Wir betrachten hier blos die Aenderung der VE. Iſt dieſer Fall dem Schüler geläufig geworden, ſo wird er ſich auch im andern Falle, wo die HE ſich ändert und die VE bleibt, bald zurecht finden.

Digitized by Google

heben, wobei die Ebene auf dem urſprünglichen Grundſchnitte ſenkrecht ſteht. Denn es kommt öfters vor, daß man eine ſolche VE nicht ſowohl anſtatt der urſprünglichen, als vielmehr neben dieſer, als eine dritte Grundebene, gebraucht (wie denn ſchon früher [§§. 12, 16] Fälle angedeutet wurden, in denen zwei Grundebenen nicht ausreichen). Um in ſolchen Fällen nicht fortwährend zwiſchen zwei zugleich vorhandenen V-Ebenen unterſcheiden zu müſſen, heiße die neu eingeführte die Seitenebene (SE), während der Name Verticalebene der urſprünglichen ausſchließlich bewahrt bleiben ſoll. Die Seitenprojection eines Puncts erhält zur Bezeichnung denſelben Buchſtaben, wie ſeine H- und V-Projection, aber mit zwei Accenten, ſo daß (a, a′, a″) einen auf alle drei Grundebenen projicirten Punct A bedeutet. — Für die Ausführung der Conſtructionen wird die SE, wie früher die VE, in die HE umgeklappt. Nach welcher Seite hin dieſe Umklappung geſchieht, hängt bei jeder Aufgabe von der Lage der urſprünglich gegebenen Projectionen gegen die neu hinzugekommene Grundebene und von der Größe des disponibeln Zeichnungsraumes ab. Für die folgenden Entwickelungen aber ſei ein für allemal feſtgeſetzt, es bewege ſich bei der Umklappung der SE ihr oberer Theil nach links zu. Nach geſchehener Umklappung repräſentirt die Zeichnungsebene drei Ebenen im Verein.

Drei aufeinander ſenkrechte Grundebenen ſcheiden den Raum in acht congruente Fächer, und jede Grundebene wird durch die beiden andern in vier Abtheilungen gebracht. Die auf dieſe Weiſe gebildeten zwölf Ebenenſtücke laſſen ſich durch folgende Bezeichnungen (in denen man ſogleich die Anfangsbuchſtaben der Wörter vorn, hinten, unten, oben, rechts, links erkennen wird) unterſcheiden:

1) r. v. HE.	5) r. u. VE.	9) v. u. SE.
2) l. v. HE.	6) l. u. VE.	10) v. o. SE.
3) l. h. HE.	7) l. o. VE.	11) h. o. SE.
4) r. h. HE.	8) r. o. VE.	12) h. u. SE.

Fig. 38. Statt eines Grundſchnitts erſcheinen nun drei, nämlich XX (der urſprüngliche) zwiſchen HE und VE; YY zwi-

ſchen HE und SE; ZZ zwiſchen VE und SE. Nach Umklappung der SE wird der Grundſchnitt ZZ auf XX fallen; da er aber zugleich auch in der VE liegt und mit dieſer umgeklappt worden iſt, ſo erſcheint er in der Zeichnungsebene noch einmal, nämlich in der Lage von YY. (Der obere Theil von ZZ fällt alſo zugleich mit dem hintern Theil von YY und dem linken von XX zuſammen; der untere Theil von ZZ mit dem vordern von YY und dem rechten von XX).

Bedeuten in Fig. 39 die Zahlen I....IV die vier Abtheilungen, in welche die Zeichnungsebene durch die Geraden XX und YY zerlegt wird, ſo vertheilen ſich die vorhin unter 1).... 12) aufgezählten Ebenenſtücke unter jene wie folgt: Fig. 39.

I	1	5	9
II	2	6	10
III	3	7	11
IV	4	8	12

Nur vier von den zwölf Stücken können unverdeckt liegen, und zu dieſen gehören jedenfalls r. v. HE, r. o. VE und v. s. SE; als viertes ergiebt ſich h. o. SE, wenn man die SE erſt umklappt, nachdem die VE bereits umgeklappt iſt, und ſo ſoll es hier auch angenommen werden. (Dächte man ſich die SE früher als die VE umgeklappt, ſo würde h. o. SE verdeckt und dagegen l. o. VE frei erſcheinen). Hiernach läßt ſich leicht ermeſſen, welche Linien in der Zeichnungsebene zu punctiren, und welche voll auszuziehen ſind.

§. 110.

Wie man die S-Projection eines Punctes aus deſſen H- und V-Projection findet, iſt aus §. 108 zu entnehmen. Wendet man ferner das, was dort über das Auffinden der neuen V-Spur geſagt wurde, auf den beſondern Fall an, wo die neue VE die SE iſt, ſo ergiebt ſich eine weſentliche Vereinfachung des Verfahrens aus dem Umſtande, daß die in Fig. 37 mit p P′ bezeichnete Senkrechte hier in XX

Digitized by Google

fallen muß, alſo nicht erſt beſonders gezogen zu werden braucht. Die Betrachtung der Figuren 40, 41, 42 und ihre Vergleichung mit Fig. 37 lehrt die Seitenſpur PP″ einer auf HE und VE gegebenen Ebene POP′ oder (PR, P′R′) finden.

Warum iſt der Kreisbogen P′P″ in Fig. 41 links und in Fig. 42 rechts von YY gezogen?)

§. 111.

Uebungsaufgaben:

1.) Ggb: Die S-Spur einer Ebene und der Punct, in welchem die Ebene die XX trifft. Geſ: H-Spur und V-Spur.

2.) Ggb: Die H- und V-Projection einer Geraden. Geſ: ihre S-Spur.

3.) Ggb: S-Spur und V-Spur einer Geraden. Geſ: ihre drei Projectionen.

4.) Ggb: Die S-Projection einer zur SE parallelen Geraden und ein Punct ihrer H-Projection. Geſ: die H- und V-Spur.

§. 112.

Die folgenden Aufgaben ſollen zeigen, wie man ſich der Seitenebene mit Vortheil bedienen kann.

Fig. 40. I. Eine Ebene POP′ wird durch eine zweite Ebene R geſchnitten, welche durch den Grundſchnitt XX geht und mit ihrem obern Theile gegen die vordere HE unter dem Winkel α geneigt iſt. Man ſoll die H- und V-Projection der Schnittlinie zeichnen.

Die Schnittlinie muß offenbar durch O gehen, daher auch ihre beiden Projectionen (§. 8). Nimmt man nun eine SE PQP′ zur Hülfe, ſo wird dieſe zwiſchen R und der HE den Winkel α enthalten; man erhält daher die S-Spur QS″ der Ebene R, wenn man $\angle$ PQS″ $= \alpha$ macht. Beſtimmt man auch die S-Spur PP″ der Ebene POP′, ſo findet man die H-Projection O der Schnittlinie, wie in §. 44, indem man die SE als eine VE behandelt und OPP″, OQS″ als die Darſtellungen der gegebenen Ebene be-

trachtet. Da S'' die S-Spur der Schnittlinie iſt, ſo ergiebt ſich die V-Projection s'O derſelben, wenn man Qs' = sS'' macht und s' mit O verbindet.

II. Die Schnittlinie zweier Ebenen (PR, P'R'), (TU, T'U') zu projiciren, welche dem Grundſchnitte XX parallel ſind *), und den Neigungswinkel zwiſchen ihnen anzugeben.

Führt man eine SE PoP' ein und beſtimmt die S-Spuren PP'', TT'' der gegebenen Ebenen, ſo iſt deren Schnitt S'' die S-Spur der geſuchten Schnittlinie; und da dieſe dem Grundſchnitte XX parallel ſein muß, ſo ergeben ſich nun leicht ihre H-Projection ab und V-Projection a'b'. Fig. 41. 42.

Der Winkel, unter welchem ſich die gegebenen Ebenen ſchneiden, iſt TS''P.

III. Durch einen gegebenen Punct (a, a') eine Ebene parallel zu einer gegebenen Ebene POP' zu legen. **)

Man führe die SE PmP' durch den gegebenen Punct A, zeichne die Lage A'' desſelben in der umgeklappten SE und die S-Spur PP'' der gegebenen Ebene. Die S-Spur RR'' der geſuchten muß offenbar durch A'' gehen und mit PP'' parallel ſein, und ihr Schnitt R mit PP' giebt enen Punct der H-Spur dieſer Ebene. Zieht man alſo RQ || PO und QR' || OP', ſo iſt RQR' die geſuchte Ebene. (Probe: mR' = mR''). Fig. 43.

IV Den Schnittpunct einer Ebene POP' und einer Geraden zu finden, welche in einer zum Grundſchnitt XX ſenkrechten Ebene liegt und in S, S' ihr Spuren hat. ***)

Man nehme eine SE durch die Gerade an, zeichne die Lage S'' der letztern nach Umklappung der SE, ſowie die S-Spur PP'' der gegebenen Ebene. Dann iſt A'' der geſuchte Schnitt, alſo a und a' ſeine Projectionen. Fig. 44.

*) Vgl. §. 44 †††.

**) Vgl. §. 48.

***) Vgl. §. 45.

Digitized by Google

V. Den Schnittpunct einer Geraden (aB, a'b') und einer Ebene zu projiciren, welche durch den Grundſchnitt XX und durch den Punct (c, c') geht.

Fig. 45. Legt man die SE cmc' durch den Punct C und beſtimmt nach ihrer Umklappung die Lage C'' des letztern, ſo iſt C''m die Seitenſpur der Ebene. Ferner zeichne man die S-Projection a''b'' der gegebenen Linie und die H-Projection sd der (auf der SE ſenkrechten) Geraden, nach welcher die projicirende Ebene Bb''a'' und die Ebene b'mC'' ſich ſchneiden. Der Punct, wo dieſe Gerade der gegebenen begegnet, iſt der geſuchte Schnittpunct, alſo d ſeine H-Projection, und die V-Projection d' ergiebt ſich nach §. 41. (Zur Probe kann man die zu sd gehörige V-Projection ſuchen, welche bei richtiger Zeichnung durch d' gehen muß).

(Wie würde man dieſe und die erſte Aufgabe löſen, wenn die Anwendung der Seitenebene verboten wäre?)

Parallele Verrückung beider Grundebenen.

§. 113.

Wird die HE parallel mit ſich ſelbſt auf- oder abwärts gerückt und zugleich die VE vor- oder rückwärts, ſo hat man nur das in §. 106 gelehrte Verfahren zweimal anzuwenden.

Eine beſonders einfache Behandlung geſtatten hier die beiden Fälle, 1.) wenn die HE um eben ſoviel erhoben wird, als die VE zurücktritt, und 2.) wenn die HE um eben ſo viel ſich ſenkt, als die VE vorrückt. Bei der genauen Verwandtſchaft beider Fälle wird die Erläuterung des erſten hinreichen, auch über den zweiten Licht zu geben.

Fig. 46. Es werde zuerſt die HE über ihre urſprüngliche Lage um das Stück mm erhoben. Dadurch rückt die H-Projection a eines Puncts A um ein gleiches Stück nach α, während die V-Projection a' ihre Stelle behält, und ſtatt der Spuren PO, OP' einer Ebene erſcheinen jetzt die Spuren Πω, ωP' (§. 106). Hierauf verlege man die VE um

das Stück $m\mu = mm$ zurück, ſo daß ſtatt des zweiten Grundſchnittes $m\omega$ nun ein dritter $\mu\Omega$ auftritt. Dadurch kommt die V-Projection a′ des Puncts A um mm höher nach a′ zu liegen; die Ebene $\Pi\omega P'$ vertauſcht ihre V-Spur $\omega P'$ mit $\Omega\Pi'$, und jetzt ſind (a, a′), $\Pi\Omega\Pi'$ die Darſtellungen des Puncts und der Ebene auf dem neuen Grundſyſtem. Nun iſt aber klar, daß die gegenſeitige Stellung der Projectionen und Spuren ſich nicht ändern kann, wenn man die Zeichnungsebene ſelbſt mit Allem, was darauf gezeichnet iſt, verſchiebt. Deshalb denke man ſich dieſe gleichſam durch die als feſt betrachtete Gerade mO hingezogen, bis m auf m und $m\omega$ in die Richtung von mO zu liegen kommt; dann fällt offenbar a in a und a′ in a′; der Punct Ω beſchreibt die auf mO ſenkrechte Gerade ΩD und gelangt nach D; die Spuren ΩΠ und ΩΠ′ haben ſich parallel mit ſich ſelbſt nach DP und DP′ geſchoben. Die letztern Lagen hätte man aber auch ſogleich aus den Lagen OP, OP′ ableiten können; denn wird ωP ſenkrecht auf mO gefällt, ſo muß der Fußpunct P in den Schnitt der DP und mO fallen. Für den Uebergang aus dem erſten Grundſyſtem in das letzte, deſſen HE in der Entfernung mm über der erſten und deſſen VE in derſelben Entfernung hinter der erſten liegt, hat man alſo folgende Regel: *Man ziehe oberhalb des erſten Grundſchnitts mO auf den Abſtand mm eine Parallele mD mit ihm, betrachte dieſe als neuen Grundſchnitt, laſſe die Projectionen von Puncten und Linien an ihrer Stelle, und ändere die Spuren jeder Ebene POP′ ſo, daß man aus dem Schnittpuncte ω der V-Spur und des neuen Grundſchnitts eine Senkrechte auf den erſten Grundſchnitt fällt, durch ihren Fußpunct P eine Parallele PD mit der H-Spur und durch den Schnitt D dieſer Parallelen und des neuen Grundſchnitts eine Parallele DP′ mit der V-Spur legt.*

Dieſelbe Regel gilt, wie man ſich leicht überzeugen kann, auch für den oben unter (2) aufgeführten Fall, mit dem Fig. 47.

Digitized by Google

einzigen Unterſchiede, daß hier der neue Grundſchnitt m𝔒 unterhalb des erſten zu ziehen iſt (ſ. Fig. 47).

§. 114.

Fig. 48. Die Aufgabe des §. 45 läßt ſich nicht mehr durch die dort angegebene einfachſte Conſtruction löſen, wenn die gegebene Gerade AB die in Fig. 48 gewählte Lage hat. Dieſer Fall kann hier als Beiſpiel für die Anwendung des im vorigen § auseinandergeſetzten Verfahrens dienen.

Iſt m𝔒 der neue Grundſchnitt, 𝔓𝔒𝔓′ die neue Darſtellung der gegebenen Ebene, ſo iſt 𝔓p′b′ die neue v-projicirende Ebene der AB. Man findet nun die Projectionen a, a′ des geſuchten Punctes auf die neuen Grundebenen wie in Fig. 3, und da beim Zurückgehen auf das erſte Syſtem dieſe Projectionen ihre Stelle behalten, ſo iſt die Aufgabe gelöſt.

(Wie würde man dieſen Fall behandeln ohne Hülfe eines zweiten Syſtems?)

Drehung des Grundſyſtems um den Grundſchnitt.

§ 115.

Fig. 49. Will man das Grundſyſtem, auf welchem der Punct (a, a′) und die Ebene POP′ gegeben ſind, mit einem andern vertauſchen, welches denſelben Grundſchnitt mO hat, mit ſeinen Grundebenen aber gegen die gleichnamigen Grundebenen des erſten Syſtems unter dem Winkel φ geneigt iſt, ſo lege man in paſſender Entfernung von O eine Seitenebene PμP′ und beſtimme die S-Spur PP″ der Ebene POP′, ſowie die S-Projection a″ des Punctes A (§. 110). Ferner zeichne man die S-Spuren $\mu\Pi$, $\mu\Pi'$ der neuen Grundebenen, indem man $P\mu\Pi = \varphi$ und $\Pi\mu\Pi' = 90°$ macht. Wird dann $a''\alpha \perp \mu\Pi$ und $a''\alpha' \perp \mu\Pi'$ gefällt, ſo iſt leicht einzuſehen, daß $a''\alpha$ (oder $\mu\alpha'$) und $a''\alpha'$ (oder $\mu\alpha$) die H- und V-Diſtanz des Puncts A in Bezug auf das neue Syſtem darſtellen. Da aber beide Syſteme einerlei Grundſchnitte ha-

ben, ſo müſſen die neuen Projectionen a, a' des Puncts wieder in die Linien ma, ma' fallen, und man erhält ſie alſo, wenn man $ma = \mu\alpha$ und $ma' = \mu\alpha'$ macht. — Die Puncte Π, Π', in denen die S-Spuren der neuen Grundebenen von der S-Spur der Ebene POP′ getroffen werden, müſſen in den neuen Spuren der letztern liegen. Da nun, wenn das neue Syſtem zu einer Zeichnungsebene auseinandergeklappt wird, $\mu\Pi$ in μP und $\mu\Pi'$ in $\mu P'$ fällt, der Punct O aber für beide Syſteme derſelbe bleibt, ſo macht man $\mu\mathfrak{P} = \mu\Pi$, $\mu\mathfrak{P}' = \mu\Pi'$ und hat dann in $\mathfrak{O}\mathfrak{P}, \mathfrak{O}\mathfrak{P}'$ die neuen Spuren der Ebene POP′.

Uebergang von einem Grundſyſtem auf ein beliebig gegebenes neues.

§. 116.

Der Vollſtändigkeit wegen und als Anregung zu nützlichen Uebungen ſollen noch Andeutungen für die Behandlung dieſes allgemeinſten Falles hier folgen, obgleich man ein Grundſyſtem, deſſen Lage von dem urſprünglichen allzuſehr abweicht, in der Regel nicht mit Vortheil einführen kann, weil das Uebertragen der Projectionen und Spuren zu viel Conſtruction fordert.

Es ſei die Lage des neuen Syſtems dadurch beſtimmt, daß die Spuren der neuen HE H und die H-Projection den neuen Grundſchnitts X auf dem urſprünglichen Syſteme angegeben ſind. Fällt man nun von einem urſprünglich in a und a' projicirten Puncte A eine Senkrechte auf die Ebene H, beſtimmt deren Fußpunct α und die Länge von $A\alpha$ (§. 62), und klappt die Ebene H in die HE um, ſo giebt die Umklappung von X den neuen Grundſchnitt und die Umklappung von α die neue H-Projection des Puncts A, deſſen V-Projection man nach §. 40 erhält, da der Werth $A\alpha$ ſeiner neuen H-Diſtanz bekannt iſt (wobei aber noch berückſichtigt werden muß, auf welcher Seite von H der Punct A liegt). — Die neue H-Spur einer auf dem erſten Syſteme gegebenen Ebene E iſt die mit der Ebene H umgeklappte Schnitt-

linie der E und H. Um auch die V-Spur zu finden, ſuche man den Winkel zwiſchen E und H (§. 84) und löſe dann die Aufgabe 1. des §. 75. (Damit man entſcheiden könne, welche von den beiden Auflöſungen der letztern Aufgabe die paſſende ſei, hat man Acht zu geben, an welcher Seite der H der ſpitze Neigungswinkel zwiſchen E und H liegt).

(Wie könnte man ſchrittweiſe, mit Hülfe der §§. 108 u. 114, oder auch des §. 108 allein, auf das neue Syſtem übergehen?)

Fünftes Kapitel.

Polygone und Polyeder.

A. Polygon-Projectionen.

§. 117.

Die Projectionen eines Polygons ſind gegeben, wenn man für jeden Eckpunct beide Projectionen hat; denn die Projectionen der Seiten ergeben ſich durch Verbindung der entſprechenden Eckenprojectionen.

Läßt ſich ein Polygon durch eine Diagonale ſo halbiren, daß je zwei Gegenſeiten gleich und parallel ſind, ſo kann es vollſtändig projicirt werden, ſobald man die Projectionen der einen Hälfte kennt; denn von den Projectionen der fehlenden Seiten iſt jede mit der Projection einer gegebenen Seite parallel und von gleicher Länge (§. 72. §. 22, Zuſ. I.) Dieß gilt alſo insbeſondere für alle Parallelogramme und für reguläre Polygone von gerader Seitenzahl.

§. 118.

Hat ein Polygon keinen einſpringenden Winkel, ſo kann auch ſeine Projection keinen einſpringenden Winkel haben. Denn angenommen, es projicire ſich der ausſpringende Winkel ABC als einſpringender Winkel abc, ſo denke man ſich die Diagonale AC und ziehe deren Projection ac; dann würden die Winkel-

ſpitzen B und b auf entgegengeſetzten Seiten der projicirenden Ebene ACca liegen, was unmöglich iſt, da das Projectionsloth Bb parallel mit dieſer Ebene ſein muß.

Kein Winkel eines Polygons kann als Projection einen flachen geben, wenn nicht auch die Projectionen aller übrigen Winkel flach oder Null werden (d. h. wenn nicht die Projection des ganzen Polygons in eine gerade Linie fällt). Denn wäre die Projection des Winkels ABC ein flacher, ſo würde die projicirende Ebene der Seite AB zugleich durch die Seite BC, mithin auch durch alle übrigen Seiten gehen, oder die Projectionen ſämmtlicher Seiten müßten in der Spur dieſer projicirenden Ebene zuſammenfallen.

Durch Beachtung dieſer Sätze kann man öfters bei dem Projiciren gegebener Polygone auf Conſtructionsfehler aufmerkſam gemacht werden.

§. 119.

Aufg. Zu unterſuchen, ob n beliebig gegebene Puncte als Ecken eines Polygons gelten können (d. h. ob ſie in einer Ebene liegen).

Aufl. Man betrachte vorläufig die gegebenen Puncte als projicirte Ecken, ziehe von einem derſelben nach allen übrigen Diagonalen, und ſehe zu, ob dieſe (oder ihre Verlängerungen) von einer beliebigen andern (nöthigenfalls verlängerten) Diagonale alle geſchnitten werden (§. 23). Iſt dieß der Fall, oder werden alle weniger einer geſchnitten und dieſe eine iſt der ſchneidenden Diagonale parallel, ſo liegen die gegebenen Puncte in einer Ebene.

(Auf welchen andern Wegen könnte man noch die Unterſuchung führen?)

§. 120.

Aufg. Aus den gegebenen Projectionen eines Polygons dieſes ſelbſt zu zeichnen.

Aufl. Man könnte die Werthe ſämmtlicher Seiten und Winkel ſuchen (§§. 60, 79); oder das Polygon von einem

Digitized by Google

Eck aus durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen, dieſe Dreiecke aus ihren Seiten conſtruiren (§. 60) und zuſammenſetzen. Einfacher aber iſt es, die H=Spur der Polygonsebene zu beſtimmen (§. 47) und die Lage ſämmtlicher Ecken nach horizontaler Umklappung dieſer Ebene zu ſuchen (§. 57).

§. 121.

Aufg. Von einem Polygon ABCD... ſind drei Ecken (a, a′), (b, b′), (c, c′) auf beide Grundebenen, die übrigen Ecken nur auf die H=Ebene projicirt. Man ſoll die fehlenden V=Projectionen d′, e′, ... finden.

Aufl. Statt die Aufgaben der §§. 47 und 43 zu löſen, kann man kürzer ſo verfahren:

Fig. 50. Man ziehe die Projectionen der AB, BC, AC und die H=Projection bd der Diagonale BD, welche die Diagonale AC in V ſchneidet. Aus der H=Projection v dieſes Puncts beſtimme man die zugehörige V=Projection v′ (§. 41), ziehe b′v′ und ſuche nach §. 41 die V=Projection d′ des Ecks D. Auf dieſelbe Weiſe ergeben ſich die V=Projectionen der übrigen Ecken.

Anſtatt der Diagonalen kann man auch je zwei verlängerte Seiten benützen, wenn ihr Schnittpunct nicht in zu große Entfernung fällt. So wird man z. B. den Punct e′ erhalten, wenn man cb, ea und e′a′ verlängert, die zum Schnitt t gehörige V=Projection t′ angiebt (§. 41), t′a′ zieht und auf ihrer Verlängerung die zu e gehörige V=Projection beſtimmt (§. 41).

§. 122.

Aufg. In einer Ebene, welche PO zur H=Spur hat und gegen die H=Ebene unter ∠ α geneigt iſt, liegt ein Polygon ABC... ſo, daß es nach horizontaler Umklappung der Ebene in der Lage $A_1B_1C_1$... erſcheint. Man verlangt die Projectionen derſelben für die urſprüngliche Stellung der Ebene.

Aufl. Man beſtimmt entweder für jedes einzelne Eck die Projectionen nach §§. 58 und 74; oder man legt eine neue VE ſenkrecht zu OP, projicirt auf ſie das Polygon, beſtimmt mittels dieſer V-Projection die H-Projectionen und H-Diſtanzen der Ecken und geht dann auf die urſprüngliche VE zurück. Iſt AQ der neue Grundſchnitt, ſo projicirt ſich in dieſen das umgeklappte Polygon (z. B. das Eck C_1 nach c′), und nach der Zurückbewegung der Ebene des letztern fallen die V-Projectionen ſämmtlicher Ecken in die Gerade Ac′, welche mit AQ den Winkel α einſchließt. Während jener Bewegung beſchreibt der Punct C_1 einen mit der VE parallelen Kreisbogen, welcher zum Halbmeſſer die auf OP ſenkrechte C_1P hat, und deſſen V-Projection alſo der mit Ac′ beſchriebene Bogen c′c′ iſt, während die H-Projection in C_1P fällt. Daher iſt c′ die Projection von C auf der VE AQ; die H-Projection c ergiebt ſich nach §. 41 und die zugehörige V-Projection auf der urſprünglichen V-Ebene nach §. 103. Eben ſo verfahre man mit den übrigen Ecken und zeichne durch Verbindung der erhaltenen Puncte die Projectionen des Polygons. (Hat man die V-Ebene AQ durch ein Eck A gelegt, wie in der Figur angenommen, ſo erſpart man für dieſes Eck das Ziehen der Senkrechten auf AQ). Fig. 67.

§. 123.

Aufg. In einer gegebenen Ebene POP′ iſt ein bekanntes Polygon ſo gezeichnet, daß die H-Projection ab einer beſtimmten Seite AB eine gegebene Richtung und die H-Projection eines dieſer Seite entſprechenden Ecks A eine gegebene Lage a hat; zugleich iſt beſtimmt, auf welche Seite von ab die H-Projection eines andern Ecks C fällt. Man ſoll die Projectionen des Polygons zeichnen.

Aufl. Man beſtimme die Lage des Puncts A und die Richtung der Linie AB in der horizontalen Umklappung der Ebene, trage AB auf dieſer Richtung ab, conſtruire über

Digitized by Google

AB auf der angedeuteten Seite das Polygon und löſe nun die vorige Aufgabe.

(Da man die H=Neigung α der Ebene POP′ zur Löſung der letzten Aufgabe nöthig hat, ſo wird man ſie gleich anfangs ſuchen und zur Auffindung der Umklappung von A benützen §. 74, §. 57. Die Umklappung der AB ergiebt ſich am leichteſten mittels ihrer H=Spur. Die Projectionen des Puncts B können auf doppelte Weiſe gefunden werden, worauf ſich eine Probe gründen läßt.)

§. 124.

Aufg. Ein bekanntes Polygon ABC... ſoll in der Lage projicirt werden, daß die Projectionen der Seite AB in die Richtungen ab, a′b′ fallen, die H=Projection der benachbarten Seite BC in die Richtung bc.

Fig. 50. Aufl. Man ſuche zuerſt die Richtung der V=Projection b′c′ von BC (§. 100). Dann könnte man die Ebene des Polygons beſtimmen und die Aufgabe im Uebrigen eben ſo behandeln wie die vorhergehende. Statt deſſen bietet ſich aber auch folgende Löſung dar.

Sucht man die Projectionen a, a′, c, c′ der Puncte A und C (§. 61, 2), ſo hat man auch die Projectionen der Diagonale AC. Zieht man von B nach einem andern Eck D eine Diagonale, welche die AC in V ſchneidet, ſo wird man die H=Projection v des Puncts V erhalten, wenn man ac in v ſo theilt, daß

$$av : vc = AV : VC \quad (§.\ 25);$$

die zugehörige V=Projection v′ nach §. 41. Nachdem die Projectionen der BD der Richtung nach gezogen ſind, ſetzt man an bv ein Stück vd ſo an, daß

$$dv : vb = DV : VB;$$

dann iſt d die H=Projection von D und die V=Projection d′ folgt wie vorhin. (Auch könnte man d und d′ nach §. 61, 2. finden, da die Länge BD bekannt iſt). Auf dieſelbe Weiſe gelangt man zu den Projectionen aller übrigen Ecken.

Digitized by Google

Da die Aufgabe des §. 100 zwei Auflöſungen geſtattet, o ſind für das Polygon zwei verſchiedene Lagen möglich.

§. 125.

Aufg. Die H-Projection abc eines Dreiecks ABC, die wahre Größe der Winkel an A und B und ein Punct der Dreiecksebene ſind gegeben. Man ſoll die Lage dieſer Ebene finden.

I. Auflöſung für den beſondern Fall, wenn $\angle c = 90°$ und zugleich $\angle A + \angle B = 90°$ (alſo auch $\angle C = 90°$) iſt. Fig. 51.

Da ein rechter Winkel ſich nur dann wieder als rechter Winkel projiciren kann, wenn einer ſeiner Schenkel der Grundebene parallel iſt (§. 79, Zuſ.), ſo muß eine von den Seiten AC, BC horizontal liegen, mithin einerlei Länge mit ihrer H-Projection haben. Um entſcheiden zu können, welche dieſe horizontale Seite ſei, mache man

$$\angle ba\gamma = \angle A \text{ und}$$
$$\angle ab\gamma = \angle B, \text{ ſo daß}$$
$$\triangle ab\gamma \sim \triangle ABC.$$

Iſt nun $ac < a\gamma$, ſo kann nicht AC # ac ſein; denn es wäre dann

$$AC < a\gamma, \text{ alſo auch}$$
$$AB < ab, \text{ was unmöglich (§. 27).}$$

Daher iſt BC = bc, und dieſe Annahme kann nicht zum zweitenmale auf einen Widerſpruch führen; denn iſt

$$ac < a\gamma, \text{ ſo iſt (wenn man } c\gamma \text{ zieht)}$$
$$\angle a\gamma c < \angle ac\gamma, \text{ alſo}$$
$$\angle b\gamma c > \angle bc\gamma, \text{ oder}$$
$$bc > b\gamma.$$

Sucht man die wahre Länge von AC und nimmt ſie zur Hypotenuſe eines rechtwinkeligen Dreiecks, deſſen Kathete ac iſt, ſo zeigt der an dieſer Kathete liegende ſpitze Winkel des Dreiecks die Neigung der Ebene ABC gegen die HE. Man führe nun durch bc eine Ebene unter dieſem Winkel (§. 75, 1) und durch den gegebenen Punct eine Parallelebene (§. 48), ſo iſt dieſe die verlangte. (Da die Ebene durch bc zwei

verſchiedene Lage annehmen kann, ſo ergeben ſich immer zwei Auflöſungen).

II. Allgemeine Auflöſung.

Fig. 51. Man mache

$$\angle\, ba\gamma = \angle\, A,$$
$$\angle\, ab\gamma = \angle\, B,$$

denke ſich in v einen beliebigen Punct V der Seite AB projicirt und ziehe vc, vγ, ſo iſt △ acv die Projection und aγv die Geſtalt des Dreiecks ACV. Denn es iſt

$$\triangle\, a\gamma b \sim \triangle\, ACB, \text{ oder}$$
$$ab : a\gamma = AB : AC; \text{ ferner}$$
$$av : ab = AV : AB \ (\S.\ 25); \text{ alſo}$$
$$\overline{}$$
$$av : a\gamma = AV : AC$$

und da zugleich

$$\angle\, va\gamma = \angle\, VAC, \text{ ſo iſt}$$
$$\triangle\, a\gamma v \sim \triangle\, ACV.$$

Nimmt man auf ab (oder ihrer Verlängerung) noch einen zweiten Punct w als Projection eines in der Richtung von AB liegenden Punctes W, ſo iſt aus denſelben Gründen vγw die Geſtalt des Dreiecks VWC, und vcw deſſen Projection. Kann man nun die Ebene dieſes letztern Dreiecks VWC finden, ſo iſt die Aufgabe gelöſt, da △ ABC in derſelben Ebene liegt. Man wähle daher vnw ſo, daß

$$\angle\, v\gamma w = \angle\, vcw = 90^\circ$$

und wende nun die oben für dieſen beſondern Fall gelehrte Auflöſung an.

Zuſatz. Jene vortheilhaften Lagen der Puncte c und w erhält man als Schnittpunct der ab und des Kreiſes, welcher durch c und γ geht und ſeinen Mittelpunct o in ab hat. Ein ſolcher Kreis iſt immer möglich (und leicht zu finden), den einzigen Fall ausgenommen, wenn

$$\gamma c \perp ab \text{ und zugleich}$$
$$\gamma n \gtrless nc$$

iſt; denn dann läuft die Gerade mo, welche cγ ſenkrecht halbirt und durch ihren Schnitt in ab den Mittelpunct o angeben ſoll, mit ab parallel. In dieſem Falle bedarf man aber

Digitized by Google

auch der Puncte v und w nicht. Denn es iſt wieder an γ die Geſtalt des in anc projicirten Dreiecks ANC, welches die CN vom Dreieck ABC abſchneidet; und da die Projection des rechten Winkels an N ebenfalls ein rechter iſt, ſo iſt die Spur der Ebene ABC entweder parallel mit ab (wenn $cn < n\gamma$) und ihre H-Neigung ergiebt ſich durch Vergleichung der Längen NC ($= n\gamma$) und nc (wie in I); oder die Spur iſt parallel mit $c\gamma$ (wenn $cn > n\gamma$) und die H-Neigung findet man aus AN und an.

Iſt $\gamma c \perp ab$ und zugleich

$\gamma n = nc$,

ſo würde man unendlich viele Kreiſe von der oben erklärten Beſchaffenheit beſchreiben können. Man hat aber keinen derſelben nöthig; denn es iſt dann

$$\triangle\, ab\gamma \cong \triangle\, abc, \text{ alſo auch}$$
$$\triangle\, ABC \cong \triangle\, abc,$$

und die geſuchte Ebene des Dreiecks iſt parallel zur HE.

§. 126.

Uebungsaufgaben.

1.) Ggb: Die Geſtalt und Größe eines Dreiecks ABC, die Geſtalt ſeiner H-Projection, die V-Projection eines Ecks A und die Richtung, in welche die H-Projection der Seite AB fällt. Geſ: Die vollſtändigen Projectionen des Dreiecks.

2.) Für ein bekanntes Parallelogramm ein Lage zu finden, in welcher es ſich auf die HE als ein Quadrat projicirt.

§. 127.

Lehrſatz. Der Flächeninhalt der Projection eines Polygons iſt das Product aus dem Flächeninhalte des wahren Polygons in den Coſinus der G-Neigung a ſeiner Ebene.

Beweis.

I.) Iſt das Polygon ein Dreieck ABC, deſſen Seite AB der GE parallel iſt, ſo projicirt ſich dieſe Seite in wahrer Größe. Betrachtet man ſie daher als Baſis, ſo verhält ſich

Digitized by Google

das Dreieck zu ſeiner Projection, wie ſeine Höhe H zur Höhe h dieſer Projection, wobei zugleich in die Augen fällt, daß h nichts anderes ſein kann, als die Projection von H (§. 79, Zuſ.). Da nun die Spur der Dreiecksebene der Seite AB parallel, alſo auf H ſenkrecht iſt, ſo iſt

$$\frac{h}{H} = \cos. \alpha$$ (§.73, Zuſ.), und mithin

$$\triangle abc = \triangle ABC \cos. \alpha.$$

II.) Ein beliebig gegebenes Dreieck F läßt ſich durch eine mit der GE parallele Gerade in zwei Dreiecke D_1, D_2 zerlegen. Nach dem Vorigen iſt (wenn f, d_1, d_2 die Projectionen von F, D_1, D_2 bezeichnen)

$$d_1 = D_1 \cos. \alpha$$
$$d_2 = D_2 \cos. \alpha$$
alſo $$d_1 + d_2 = (D_1 + D_2) \cos. \alpha$$
oder $$f = F \cos. \alpha.$$

III.) Jedes andere Polygon P zerfällt durch Diagonalen in Dreiecke $F_1, F_2, F_3, \ldots.$ Sind $p, f_1, f_2, f_3, \ldots.$ die Projectionen des Polygons und der Dreiecke, ſo hat man (nach II):

$$f_1 = F_1 \cos. \alpha$$
$$f_2 = F_2 \cos. \alpha$$
$$f_3 = F_3 \cos. \alpha$$
$$\vdots$$
alſo $$f_1 + f_2 + f_3 + \ldots = (F_1 + F_2 + F_3 + \ldots) \cos. \alpha$$
oder $$p = P \cos. \alpha.$$

B. Polyeder-Projectionen.

§. 128.

Ein Polyeder iſt völlig gegeben, wenn man die Projectionen jedes einzelnen Ecks kennt und zugleich weiß, wie die Ecken paarweiſe (als Endpuncte je einer Kante) zuſammengehören. Die Länge einer Kante oder Diagonale läßt ſich nach §. 60 finden; die Geſtalt und Größe einer Seite nach §. 120; die Größe eines Winkels *) nach §. 84 (wenn man

*) Der Winkel eines Polyeders iſt die Neigung zwiſchen den Ebenen zweier benachbarten (d. h. in einer Kante zuſam-

Digitized by Google

die Spuren ſeiner Schenkelebenen ſucht), oder nach §. 93 (wenn die Winkel zwiſchen den Kanten bekannt ſind).

§. 129.

Inſofern die Projection eines Körpers immer ein klares Bild deſſelben hervorrufen ſoll, kann man der Anſchauung auf eine wirkſame Weiſe dadurch zu Hülfe kommen, daß man in der Zeichnung diejenigen Kanten, welche dem Auge unmittelbar ſichtbar wären, von jenen unterſcheidet, welche erſt durch die Seitenflächen hindurch geſehen werden müßten, wenn nämlich für jeden einzelnen Punct das Auge in der Richtung ſeines projicirenden Lothes gedacht wird, und zwar in einer Entfernung von der Grundebene, welche die Diſtanz des am weiteſten von letzterer abſtehenden Ecks übertrifft. Die Projectionen ſolcher Kanten, welche durch Seitenflächen verdeckt ſind, werden punctirt angegeben. (Dieſe punctirten Kanten dürfen aber nicht mit ſolchen Projectionen verwechſelt werden, welche ihrer Lage auf der hintern HE oder untern VE wegen punctirt gezeichnet ſind).

§. 130.

Aufg. Das Netz eines Polyeders zu zeichnen, deſſen Projectionen bekannt ſind.

Aufl. Man conſtruirt ſämmtliche Seiten (§. 120) und legt ſie mit entſprechenden Kanten in einer Ebene aneinander.

§. 131.

Zur Löſung der Aufgabe: ein Polyeder in gegebener Stellung zu projiciren, ſind zweierlei Beſtimmungsſtücke erforderlich; nämlich 1.) diejenigen Stücke, durch welche das Polyeder an ſich im Raume beſtimmt wird, und 2.) die nöthigen Angaben, aus denen ſeine Stellung gegen

---

menhängenden) Seiten, und muß wohl unterſchieden werden von dem Winkel einer Polyederſeite (der Neigung zwiſchen benachbarten Kanten).

Digitized by Google

die Grundebenen erhellt. Hiernach kann man die Auflöſung ſelbſt in zwei Theile trennen, indem man den Körper zunächſt mittels der erſtern Beſtimmungsſtücke auf ein beliebiges, möglichſt bequem gewähltes Grundſyſtem projicirt, und ihn dann erſt in die vorgeſchriebene Stellung gegen dieſes Syſtem bringt, wozu ſpäter (§. 155) die Mittel an die Hand gegeben werden.

In den nachfolgenden Beiſpielen iſt die Wahl des Grundſyſtems freigegeben. Auch ſoll für den darzuſtellenden Körper nur die H-Projection ſammt den H-Diſtanzen der einzelnen Ecken geſucht werden; die Projection auf einer beliebigen VE läßt ſich dann leicht nach §. 40 beibringen.

§. 132.

Aufg. Drei von demſelben Eck ausgehende Kanten AB, AC, AD eines Parallelepipeds ſind gegeben und die drei Winkel zwiſchen ihnen. Man ſoll das Parallelepiped projiciren.

Fig. 52. Aufl. Man wähle die Ebene zweier gegebener Kanten AB, AC zur HE, lege in ihr die drei Winkel an einander, und ſchneide auf den Schenkeln die Stücke AB, AC, $AD_{\prime} = AD_{\prime\prime} = AD$ ab. Werden dann die Ebenen $BAD_{\prime}$ und $CAD_{\prime\prime}$ um AB und AC gedreht, bis $AD_{\prime}$ mit $AD_{\prime\prime}$ in AD zuſammenfällt, ſo ergiebt ſich die Projection d des Ecks D als Schnitt der beiden Senkrechten, welche man von $D_{\prime}$ und $D_{\prime\prime}$ auf AB und AC fällt. Die Projectionen der übrigen Kanten kann man ſogleich zeichnen, da ſie den Linien AB, AC, Ad gleich und parallel ſind.

Die vier nicht in der HE liegenden Ecken haben einerlei H-Diſtanz Dd, welche man als Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks erhält, zu deſſen beiden andern Seiten entweder vd und $vD_{\prime}$, oder Ad und $AD_{\prime}$ genommen werden.

§. 133.

Aufg. Eine Pyramide zu projiciren, wenn ihre Baſis ABC..., ihre Höhe h und die an AB liegende Seite gegeben ſind.

Aufl. Nimmt man die Ebene der Baſis als HE und conſtruirt über AB die gegebene Seite, ſo fällt die H-Projection s der Spitze S in die auf AB ſenkrechte S_1v, und ihre Lage iſt beſtimmt, ſobald man eine der Entfernungen vs oder As kennt. Um dieſe zu finden, conſtruirt man entweder das Dreieck Ssv (aus der Hypotenuſe S_1v und der Kathete h) oder das Dreieck SsA (aus der Hypotenuſe S_1A und der Kathete h.) — Fig. 53.

(Wie erhält man am leichteſten das Netz der Pyramide?)

§. 134.

Aufg. Eine ſchiefabgeſtumpfte Pyramide zu projiciren, wenn gegeben iſt ihre Baſis ABCD, die an AB liegende Seite ABFE, und von der an AD liegenden Seite ADHE die Winkel α und ε bei A und E.

Aufl. Als HE gelte die Ebene der Baſis. — Fig. 54.

Man conſtruire über AB die Umklappung ABF_1E_1 der Seite ABFE, mache

$$\angle DAE_{,,} = \alpha,$$
$$AE_{,,} = AE_1$$
$$\angle AE_{,,}H_{,,} = \varepsilon$$
$$E_1e \perp AB$$
$$E_{,,}e \perp AC,$$

ſo erhält man die Projection e von E, die H-Spur P von FE, die H-Spur Q von FE, die H-Spur Q von EH, alſo auch die Richtungen Pe und Qe für die Projectionen von EF und EH. Fällt man $F_1f \perp AB$, ſo ſchneidet dieſe die verlängerte Pe in der Projection f von F. Mittels der Kantenprojectionen Ae und Bf findet man die Projection s der Spitze der ergänzten Pyramide, und mit Hülfe dieſes Punctes s die Richtungen sC, sD für die Projectionen der Kanten CS und DS. Der Schnitt h von Ds und Qe iſt die Projection des Ecks H. Nun bleibt nur noch das Eck G zu ſuchen übrig, welches der Schnitt der Ebene EFH mit der Kante CS iſt. Die Spur der Ebene EFH iſt PQ; die Ebene ſelbſt wird durch die Ebene CDS nach einer Geraden ge-

Digitized by Google

ſchnitter, welche durch H geht und ihre Spur in R hat, alſo nach Rh ſich projicirt, und die verlängerte Rh ſchneidet die Cs in der Projection g des geſuchten Ecks; hg und gf ſind die Projectionen der noch übrigen Kanten. (PQ, BC und fg müſſen in einem Puncte T zuſammentreffen; denn T iſt die Spur der Geraden FG, nach welcher ſich die Ebenen BCS und EFGH ſchneiden).

Die H=Diſtanz Ee des Ecks E ergiebt ſich, wenn man das Dreieck EeA oder das Dreieck Eev conſtruirt. Hat man mit ihrer Hülfe den Punct E auf eine beliebige VE projicirt, ſo erhält man leicht die V=Projectionen der Linien PF und QE, alſo auch der Puncte E, F, H. Die V=Projection des Punctes G kann nach §. 121 ſuchen, oder mit Hülfe der V=Projection von CS.

Zuſatz. Das Netz des Körpers kann man entwerfen, ehe man noch die V=Projection beſtimmt hat. Die Seiten ABCD und ABF,E, ſind unmittelbar gegeben. In der umgeklappten Seite ADH,,E,, fehlt nur noch der Punct H,,, den man aber findet, wenn man hH,, ⊥ AD fällt. Um die Umklappung der Seite CDHG zu erhalten, fange man mit dem Puncte H an, der ſich in eine aus h auf CD gefällte Senkrechte ſo umklappt, daß ſeine Lage H, von D die Entfernung DH,, hat; dann iſt RH, die Richtung der umgeklappten Seite HG und die Umklappung von G iſt der Schnitt der RH, mit einer Senkrechten auf CD aus g. Dadurch iſt die Länge der Kante CG gefunden, welche man nun benützen kann, um die Lage G,, des Punctes G in der Umklappung von BCGF zu erhalten, indem man aus C mit der Länge CG eine von g auf BC gefällte Senkrechte durchſchneidet. Mittels einer Senkrechten auf BC aus f und der Länge BF, findet man eben ſo die Lage F,, des Punctes F in dieſer Umklappung. (Bei genauer Zeichnung geht F,,G,, durch T). — Endlich hat man noch das Viereck EFGH zu zeichnen, von welchem vorläufig die vier Seiten bekannt ſind. Zieht man durch g eine Parallele mit der Spur PQ, bis eine projicirte Seite ef in i geſchnitten wird, ſo iſt gi die wahre Länge der in der Ebene des Vierecks gezogenen

Linie GJ. Die Lage J_1 des Puncts J in der Umklappung F_1E_1 ergiebt ſich mit Hülfe der auf AB ſenkrechten iJ_1. Wenn man nun über F_1J_1 mit den Linien FG und gi ein Dreieck beſchreibt, ſo erhält man am Puncte F_1 den Winkel EFG und kann eine dem Viereck EFGH congruente Figur über E_1F_1 leicht vollenden.

§. 135.

Aufgabe. An einem Dreikant, deſſen Seiten bekannt ſind, wird jede Kante in gegebener Entfernung von der Spitze durch eine Ebene ſenkrecht geſchnitten; und zwar haben dieſe Entfernungen ſolche Verhältniſſe zu einander, daß der gemeinſchaftliche Punct der drei Schnittebenen innerhalb des Dreikants liegt. Man projicire den Körper, der von den ſechs vorhandenen Ebene begrenzt wird, und entwerfe ſein Netz.

Aufl. Die Seiten des Körpers ſind ſechs Vierecke, deren jedes zwei rechte Winkel einander gegenüber enthält. Das durch die Schnittebene eingeſchloſſene Dreikant iſt das Supplementardreikant des gegebenen (vgl. §. 91). Fig. 55.

Wählt man eine Seite ASB des gegebenen Dreikants zur HE, klappt in dieſe die beiden andern Seiten ASC und BSC um, trägt auf den Kanten die gegebenen Entfernungen SA, SB, $SC_1 = SC_{11}$ ab, und errichtet aus A, B, C_1, C_{11} Senkrechte auf SA, SB, SC_1, SC_{11}, ſo werden ſich drei von den ſechs Vierecken bilden, die den Körper einſchließen ſollen. Nun drehe man die umgeklappten Seiten ASC_1 und BSC_{11} um SA und SB, bis ſich C_1 und C_{11} in C vereinigen, beſtimme die Projection c des Ecks C und die Projection Sc der Kante SC. Die Projectionen d und e der Puncte D und E fallen in die Geraden AF und BF, und beſtimmen ſich daher, wenn man die Projectionen der Linien CD und CE zieht, was durch Verbindung ihrer Spuren P und Q mit der

Projection c geſchehen kann. *) Hiemit iſt die H-Projection des Körpers ſchon vollendet; denn die auf SA und SB ſenkrecht ſtehenden Seiten projiciren ſich in die Geraden AF und BF, und ihre gemeinſchaftliche Kante FG hat zur Projection den Punct F (g); alſo iſt egdc die Projection der ſechſten (auf SC ſenkrechten) Seite.

Das Netz des Körpers iſt zur Hälfte bereits vorhanden; um es zu ergänzen, hat man die Seiten AFGD, BFGE umzuklappen und an eine dieſer Umklappungen die Seite EGDC anzufügen. Das Viereck AFGD iſt bei F und D rechtwinkelig; ſeine Umklappung $AFG_{,,}D_{,,}$ wird daher gefunden, wenn man die Umklappung $D_{,,}$ des Punctes D ſucht (indem man die auf Ad ſenkrechte $dD_{,,}$ von A aus mit AD_1 durchſchneidet) und $\angle AD_{,,}G_{,,} = \angle AFG_{,,} = 90°$ macht. Aehnlich kann man die Umklappung BFG_1E_1 des Vierecks BFGE ſuchen (und dann muß $FG_1 = FG_{,,}$ ſein). Das letzte Viereck $E_1G_1D_3C_3$ des Netzes (welches $\cong$ EGDC iſt) muß bei E_1 und D_3 rechtwinkelig ſein, und ſeine Seiten haben der Reihe nach die Längen E_1G_1, $D_{,,}G_{,,}$, D_1C_1, $C_{,,}E_{,,}$; man kann es demnach leicht zeichnen (und hat zugleich eine Genauigkeitsprobe, da eine Angabe mehr vorhanden, als zu ſeiner Conſtruction nöthig).

Die H-Diſtanzen der Puncte D, E, G ſind $D_{,,}d$, E_1e, G_1g; die H-Diſtanz des Puncts C iſt aus C_1v und cv zu finden.

§ 136.

Aufg. Den Körper zu projiciren, welcher ſich bildet, wenn man durch jede Kante eines

---

*) Liegt eine dieſer Spuren, z. B. P, in unbequemer Entfernung, ſo ziehe man AC_1, SD_1 und Ac (als Projection von AC). Iſt X der Schnittpunct der AC_1 und SD_1, ſo findet man die Projection x, welche ihm nach der Zurückbewegung der Seite SAD_1C_1 entſpricht, als Durchſchnitt der Ac und einer aus X auf SA gefällten Senkrechten. Nun zieht man Sx und verlängert ſie bis an AF, wodurch man die Projection d erhält.

Digitized by Google

gegebenen Würfels eine Ebene ſenkrecht zur entſprechenden Diagonalebene legt.

Aufl. Je vier Ebenen, welche durch die Kanten einer und derſelben Würfelſeite gehen, müſſen ſich in einem Puncte ſchneiden, weil ſie gegen dieſe Seite einerlei Neigung (von 45°) haben, und die Projection dieſes Puncts auf die Würfelſeite fällt in den Mittelpunct derſelben. Legt man daher die HE parallel zu den Seiten $A_1A_2A_3A_4$ und $B_1B_2B_3B_4$ des Würfels, ſo daß ſich dieſer als ein Quadrat projicirt, ſo geben die Diagonalen des Quadrats die Projectionen von acht Kanten des neuen Körpers, deren vier von den Puncten A nach dem Puncte U, und vier von den Puncten B nach O gehen. Indem die acht Ebenen, welche zu vieren in O und U zuſammenkommen, von den vier durch die Würfelkanten A_1B_1, A_2B_2, ... geführten Ebenen geſchnitten werden, entſtehen die übrigen Kanten des neuen Körpers, an Zahl 16, und von dieſen müſſen ſich je vier in eine gerade Linie mm projiciren, weil die Ebene, in welcher ſie liegen, vertical ſteht. Zugleich bildet jede ſolche Gerade mit den Kanten des Quadrats $a_1a_2a_3a_4$ gleiche Winkel, läuft alſo mit einer Diagonale parallel. (So wie in den Puncten O und U, ſo kommen auch in jedem der Puncte M vier Kanten zuſammen. Die Puncte M haben einerlei H-Diſtanz). Fig. 56.

Geht die HE durch das Eck U des Körpers, ſo fällt die V-Projection u′ deſſelben in den Grundſchnitt, und die H-Diſtanzen aller übrigen Ecken laſſen ſich unmittelbar auf der Geraden $m_1m_{,,}$ ableſen. Denn die Projection des Körpers auf einer zu $A_1A_2B_2B_1$ parallelen VE iſt offenbar der H-Projection congruent; denkt man ſich daher über einem zu a_1a_2 parallelen Grundſchnitt die als H-Projection erhaltene Figur noch einmal gezeichnet, und zwar ſo, daß $m_1m_3 \perp$ GS, ſo hat man die V-Projection; (nur die Bezeichnung der Puncte in dieſer zweiten Figur wird eine andere ſein, indem z. B. an die Stelle von m_1 der Buchſtabe u′ und an die Stelle von m_3 der Buchſtabe o′ tritt;) und man ſieht, daß die Stücke der Linie m_1m_3 (oder u′o′) die H-Diſtanzen

der verſchiedenen Ecken in folgender Weiſe angeben:

$m_1 v$	zeigt	die	H-Diſtanz	der	Puncte	A
$m_1 o$	—	—	—	—	—	M
$m_1 w$	—	—	—	—	—	B
$m_1 m_3$	—	—	—	des	Punctes	O

Zuſatz. Der Körper hat 12 unter ſich congruente Seiten, 24 gleichlange Kanten, 14 Ecken. An den 8 Ecken A und B, welche zugleich dem zu Grunde liegenden Würfel angehören, liegen dreikantige — an den übrigen Ecken vierkantige Raumecke. Jede Seite iſt ein Rhombus, welcher als eine Diagonale die Würfelkante hat und deſſen zweite Diagonale der Diagonale der Würfelſeite gleich iſt. Die drei Körperdiagonalen zwiſchen je zwei vierkantigen Raumecken ſind gleich und halbiren ſich ſenkrecht im Mittelpuncte des Würfels. Die vier Diagonalen zwiſchen dreikantigen Raumecken ſind ebenfalls unter ſich gleich und halbiren ſich gegenſeitig im Mittelpuncte des Würfels.

Reguläre Polyeder.

§. 137.

Ein Polyeder heißt **regulär**, wenn alle ſeine Seiten congruente reguläre Polygone und ſeine ſämmtlichen Raumecke unter ſich congruent ſind. Aus dieſer Erklärung folgt ſogleich, daß alle Kanten und alle Winkel eines ſolchen Polygons einander gleich ſind.

Die Stereometrie beweiſt, daß **fünf** reguläre Polyder (Tetraeder, Oktaeder, Ikoſaeder, Hexaeder, Dodekaeder) wirklich exiſtiren, und daß außer dieſen kein anderes möglich iſt.

Bei den nachfolgenden Aufgaben über die Projection der regulären Polyeder wird (wie bisher) nur nach den H-Projectionen und den H-Diſtanzen der Ecken gefragt, da man mittels derſelben die Projectionen auf jeder beliebigen VE immer angeben kann.

Digitized by Google

Aufgaben.

Die fünf regulären Polyeder bei gegebener Kante zu projiciren, wenn ſie mit einer Seite in der HE liegen.

§. 138.

Das Tetraeder.

Drei Ecken A_1, A_2, A_3 liegen in der HE und beſtimmen hier ein gleichſeitiges Dreieck, deſſen Seite die Tetraederkante iſt. Werden die drei andern Dreiecke aus ihrer horizontalen Umklappung zurückbewegt, ſo bleiben die Projectionen ihrer Spitzen in den Geraden, welche die Seiten $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_1$ ſenkrecht halbiren; nach Vereinigung dieſer Spitzen zum vierten Eck des Tetraeders fällt daher die gemeinſchaftliche Projection b in den Vereinigungspunct der drei Halbirungslinien, d. h. in den Mittelpunct des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$. Hiernach iſt die H-Projection des Tetraeders leicht herzuſtellen. Fig. 57.

Die H-Diſtanz der Puncte A iſt $= 0$; die H-Diſtanz $B_0 b$ des Puncts B erhält man durch Umklappung des rechtwinkeligen Dreiecks $A_2 B b$; oder als Kathete eines andern Dreiecks, welches zur zweiten Kathete die Entfernung bv der Projection b von $A_1 A_2$ und zur Hypotenuſe die Höhe $A_3 v$ der Tetraederſeite hat.

§. 139.

Das Hexaeder.

Die H-Projection iſt ein über der gegebenen Kante conſtruirtes Quadrat. Vier Ecken haben zur H-Diſtanz die Kante; die H-Diſtanz der übrigen iſt $= 0$.

§. 140.

Das Oktaeder.

Es ſei $A_1 A_2 A_3$ die Seite, mit welcher das Oktaeder in der HE liegt. Denkt man ſich die drei benachbarten Seiten $A_1 A_2 B_3$, $A_2 A_3 B_1$, $A_3 A_1 B_2$ aus ihrer horizontalen Fig. 58.

Digitized by Google

Umklappung ſo weit aufgerichtet, daß jede mit $A_1A_2A_3$ den Winkel des Oktaeders einſchließt, ſo hat man im Raume die Hälfte der Oktaederoberfläche conſtruirt, und es iſt leicht zu zeigen, daß 1.) die Projectionen A_2A_1b, $A_2A_3b_1$, $A_1A_2b_3$ jener an $A_1A_2A_3$ liegenden Seiten unter ſich congruent ſein müſſen; 2.) daß jede dieſer Projectionen ein gleichſchenkeliges Dreieck iſt; und 3.) daß die Ecken B einerlei H-Diſtanz haben, alſo die Ebene $B_1B_2B_3$ der HE parallel iſt. Die zweite Hälfte des Oktaeders iſt der erſten congruent; ſtatt des Dreiecks $A_1A_2A_3$ tritt hier das Drieeck $B_1B_2B_3$ auf, und an dieſes ſchließen ſich wieder die drei Nachbardreiecke $B_1B_2A_3$, $B_2B_3A_1$, $B_3B_1A_2$ unter dem Winkel des Oktaeders an. Betrachtet man daher die Ebene $B_1B_2B_3$ als horizontale Grundebenen, ſo hat man für die Projection ganz denſelben Fall, wie vorhin; und da ſich die Projectionen aus der Ebene $B_1B_2B_3$ auf die urſprüngliche HE unverändert übertragen, ſo ſieht man, daß die Dreiecke $b_1b_2A_3$, $b_2b_3A_1$, $b_3b_1A_2$ den Projectionen der an $A_1A_2A_3$ liegenden Dreiecke congruent ſind. In der Figur $A_1b_3A_2b_1A_3b_2$ ſind daher alle Seiten und Winkel gleich, oder ſie iſt ein reguläres Sechseck. Die H-Projection des Oktaeders läßt ſich hiernach ſehr leicht zeichnen.

Die H-Diſtanz der Puncte A iſt $=0$. Die H-Diſtanz der Puncte B kann man als Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks finden, welches zur Hypotenuſe die Höhe A_1v der Oktaederſeite und zur zweiten Kathete die Projection b_1v dieſer Höhe hat.

§. 141.

Das Dodekaeder.

Fig. 59. Man ſtelle ſich die Oberfläche des in Fig. 59 projicirten Dodekaeders aus zwei Hälften zuſammengeſetzt vor, deren untere aus dem Fünfeck $A_1A_2 \ldots A_5$ und den fünf angrenzenden beſteht, deren andere eben ſo durch das Fünfeck $B_1B_2 \ldots B_5$ und die angrenzenden gebildet wird. Beide Hälften ſind congruent. Betrachtet man zunächſt blos die

Digitized by Google

untere Hälfte, ſo iſt leicht zu beweiſen, daß in dem Zehneck $u_1 o_4 u_2 \ldots$ alle Seiten gleiche Länge haben, die Winkel o unter ſich gleich ſind, und eben ſo die Winkel u. Nimmt man die obere Hälfte hinzu, ſo fällt in die Augen, daß die Ebene $B_1 B_2 B_3 \ldots$ der HE parallel iſt; denn die Puncte O haben einerlei H-Diſtanz und zugleich einerlei Abſtand von der Ebene $B_1 B_2 B_3 \ldots$; daher ſind die Projectionen beider Hälften congruent, oder im Zehneck $u_1 o_4 u_2 \ldots$ ſind die Winkel o den Winkeln u gleich, d. h. das Zehneck iſt regulär. Dieſe Bemerkung leitet ferner darauf, daß auch das durch die Puncte A und b beſtimmte Zehneck regulär iſt, welches mit jenem concentriſch und ſo liegt, daß die Seiten des einen den Seiten des andern parallel ſind.

Um nun die H-Projection des Körpers wirklich herzuſtellen, beginne man mit dem Fünfeck A, zeichne dann das Fünfeck b, und ſuche einen Punct des Zehnecks $u_1 o_4 u_2 \ldots$ zu erhalten (durch welchen dann dieß Zehneck ſelbſt völlig beſtimmt iſt). Man weiß, daß z. B. der Punct u_1 in der Geraden cA_1 und u_2 in der cA_2 liegen muß, und daß $u_1 u_2 = A_5 A_3$ iſt (denn die Diagonale $U_1 U_2$ iſt $\parallel A_1 A_2$, d. h. $\parallel$ HE, projicirt ſich mithin in unverkürzter Größe); und dadurch wird man auf ein einfaches Verfahren zur Auffindung der Puncte u_1 und u_2 geführt. Ein anderes Verfahren wäre folgendes: Zeichnet man das an $A_1 A_2$ liegende Fünfeck in horizontaler Umklappung, ſo kommt der in u_1 projicirte Punct nach U_0 zu liegen; die Projection u_1 liegt deshalb in der aus U_0 auf $A_1 A_2$ gefällten Senkrechten $U_0 M$, iſt mithin deren Schnitt mit cA_1. Um die Gerade $U_0 M$ zu erhalten, kann man den Punct U_0 (alſo auch das umgeklappte Fünfeck) ganz entbehren; denn ſie geht offenbar auch durch den Punct A_5. Es läßt ſich aber ſelbſt die Conſtruction des rechten Winkels umgehen, wenn man ſieht, daß $A_5 M$ zugleich durch b_3 geht; und daß dieß wirklich der Fall ſei, zeigt ſich ſo: Im Zehneck $A_1 b_4 A_2 \ldots$ iſt

$A_4 b_4 \perp A_1 A_2$, und zugleich
$A_4 b_4 \parallel A_5 b_3$, alſo
$A_5 b_3 \perp A_1 A_2$.

Digitized by Google

(Man kann ferner leicht beweiſen, daß $u_1o = cA_2$ und $A_1b_4 = A_1u_1$.)

Die H-Diſtanz Oo der Puncte O findet man als Kathete des rechtwinkeligen Dreiecks, deſſen andere Seiten o_1v und vA_1 ſind; zugleich zeigt der Außenwinkel dieſes Dreiecks, welcher der gefundenen Kathete gegenüberliegt, die Größe des Dodekaederwinkels. Die H-Diſtanz Uu der Puncte U ergiebt ſich auf ähnliche Weiſe mittels der Linien A_1u_1 und A_1A_2 oder der Linien vr und vw. Da die Puncte U von der Ebene B_1B_2B ... dieſelbe Entfernung haben, wie die Puncte O von der HE, ſo iſt Uu + Oo die H-Diſtanz der Puncte B.

§. 142.

Das Ikoſaeder.

In jedem Eck des Ikoſaeders kommen fünf Dreiecke zuſammen und bilden eine Pyramide, deren Baſis ein über der Körperkante beſchriebenes reguläres Fünfeck iſt. Drei ſolche Fünfecke grenzen mit ihren Kanten an das in der HE liegende Dreieck $A_1A_2A_3$ und haben einerlei H-Neigung (denn jedes der Dreikante, deren Spitzen die drei Puncte A ſind, hat zwei gleiche Seiten, alſo auch zwei gleiche Winkel); daher ſind die Projectionen dieſer Fünfecke congruent. Die Ecken b der Projectionen liegen in den Geraden, welche die Seiten des Dreiecks $A_1A_2A_3$ ſenkrecht halbiren und haben gleiche Entfernung von dieſen Seiten; und da das Dreieck $B_1B_2B_3$ horizontal liegt (denn den Puncten B entſprechen gleiche H-Diſtanzen) und ſich in ſeiner wahren Größe projicirt, ſo beſtimmen die ſechs Puncte b mit den Puncten A ein reguläres Sechseck. — Die an $A_1A_2A_3$ liegenden Dreiecke $A_1A_2U_3$, $A_2A_3U_1$, $A_3A_1U_2$ haben gleiche H-Neigung; die Ecken u ihrer (unter ſich congruenten) Projectionen liegen in den Geraden, welche die Seiten des Dreiecks $A_1A_2A_3$ ſenkrecht halbiren, und zwar in gleichen Entfernungen von dieſen Seiten, alſo auch vom Mittelpuncte c des Dreiecks. Die drei an $B_1B_2B_3$ grenzenden Dreiecke $B_1B_2O_3$, $B_2B_3O_1$, $B_3B_1O_2$ haben gegen $B_1B_2B_3$ dieſelbe Nei-

Digitized by Google

gung, wie die drei vorigen gegen die HE; ihre Projectionen ſind daher den Projectionen der vorigen congruent und die Entfernungen co den Entfernungen cu gleich. Hieraus und aus der gegenſeitigen Lage der Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $b_1b_2b_3$ folgt, daß die Puncte o mit den Puncten u ein reguläres Sechseck beſtimmen, deſſen Seiten mit denen des Sechsecks $A_1b_2A_3$ ... parallel ſind, und welches gezeichnet werden kann, ſobald man eines ſeiner Ecken hat. Nun liegt aber z. B. der Punct o_3 in der Geraden, welche b_1b_2 ſenkrecht halbirt (d. h. in der verlängerten Verbindungslinie b_3A_3), und iſt von der auf A_2A_3 ſenkrechten b_1v um die halbe Diagonale des regulären Fünfecks $A_2A_3O_3B_1O_2$ (welches aus ſeiner Seite A_2A_3 conſtruirt werden kann) entfernt; wodurch ſich dieſer Punct o_3 beſtimmt. — Nach dieſen Erläuterungen läßt ſich die H-Projection des Ikoſaeders ausführen.

Die H-Diſtanzen O_1o_1, U_1u_1, B_1b_1 der Puncte O, U, B erhält man, wenn man die Dreiecke $A_1O_1o_1$, vU_1u_1, vB_1b_1 conſtruirt, von deren jedem man eine Kathete und die Hypotenuſe kennt. Der Außenwinkel v des Dreiecks vU_1u_1 zeigt zugleich den Winkel des Ikoſaeders.

§. 143.

Betrachtet man die Projectionen der vier letztern Polyeder, und bedenkt, daß Alles, was für die beiden Gegenſeiten $A_1A_2A_3$ ... und $B_1B_2B_3$ gilt, auch für jedes andere Paar Gegenſeiten gelten muß (da es gleichgiltig iſt, mit welcher Seite man den Körper in die HE legen will), ſo ergeben ſich folgende Sätze:

1.) Jeder Seite des Körpers entſpricht eine parallele Gegenſeite. ($A_1A_2A_3 \ldots \parallel B_1B_2B_3 \ldots$).

2.) Je zwei Gegenkanten ſind parallel. ($A_1A_2 \parallel B_1B_2$, $A_2A_3 \parallel B_2B_3$, ...).

3.) Die Gerade, welche die Mittelpuncte zweier Gegenſeiten verbindet, ſteht ſenkrecht auf den Ebenen beider Seiten (denn ſie projicirt ſich auf dieſe Ebenen als ein Punct c).

4.) Dieſe Gerade hat immer dieſelbe Länge, welches Paar Gegenſeiten man auch wählen mag; oder die Entfernung zweier Gegenſeiten iſt bei allen Paaren dieſelbe.

5.) Eine Ebene, welche eine Kante ſenkrecht halbirt, halbirt auch deren Gegenkante ſenkrecht. (Die Verbindungslinie der Mittelpuncte von A_1A_2 und b_1b_2 iſt die H-Spur einer verticalen Ebene, welche A_1A_2 und B_1B_2 ſenkrecht halbirt).

Eine ſolche Ebene E geht zugleich durch die vier Mittelpuncte der zwei Paar Gegenſeiten, welche in den halbirten Kanten zuſammenſloßen; daher ſchneiden ſich die beiden Geraden, welche die einander gegenüberliegenden Mittelpuncte verbinden, und zwar müſſen ſie ſich im Schnittpuncte C gegenſeitig **halbiren**; denn dieſe Verbindungslinien bilden in der Ebene E mit den vier Geraden, von denen je zwei aus dem Halbirungspuncte einer Kante nach den Mittelpuncten M der entſprechenden Seiten gehen, eine Figur, beſtehend aus zwei Vierecken $CM_1K_2M_3$ und $CM_2K_1M_4$ (Fig. 61), deren **Congruenz** leicht zu erweiſen iſt (die Winkel K ſind dem Winkel des Polyeders gleich). Zugleich zeigt die Natur dieſer Vierecke, daß auch die Verbindungslinie der Puncte K durch C geht und in C halbirt wird; und hieraus folgt wieder, daß die beiden Diagonalen des Rechtecks, welches durch die in Rede ſtehenden Gegenkanten beſtimmt wird, ebenfalls im Puncte C ſich ſchneiden und halbiren. Die Endpuncte einer ſolchen Diagonale heißen **Gegenecken** des Polyeders. Eine Gerade zwiſchen zwei Gegenecken, oder zwiſchen den Halbirungspuncten zweier Gegenkanten, oder zwiſchen den Mittelpuncten zweier Gegenſeiten heißt eine **Axe** des **Körpers**. Man hat demnach noch folgende Sätze:

6.) Jedes der vier Polyeder hat drei Syſteme von Axen. Die Axen jedes einzelnen Syſtems ſind unter ſich gleich. Die Axen ſämmtlicher Syſteme gehen durch einen und denſelben Punct C, welcher der **Mittelpunct** des Körpers heißt, und werden in dieſem Puncte halbirt.

Digitized by Google

7.) Daher läßt ſich ſowohl **in** als **um** ein ſolches Polyeder eine Kugel beſchreiben, und beide Kugeln haben einerlei Mittelpunct C.

8.) Eine durch zwei Gegenecken gelegte Axe bildet gleiche Winkel mit den Kanten, welche in dieſen Ecken zuſammenſtoßen (denn die Axe iſt die gemeinſchaftliche Diagonale der unter ſich congruenten Rechtecke, welche durch jene Kanten und ihre Gegenkanten beſtimmt werden).

9.) Verbindet man jede von den in einem Eck zuſammenkommenden Kanten durch eine Ebene mit der durch dieſes Eck gehenden Axe, ſo gehen dieſe Ebenen durch die im Gegeneck zuſammenkommenden Kanten, und die Winkel zwiſchen je zwei benachbarten Ebenen ſind gleich (denn die Dreikante, welche durch die Axe und je zwei benachbarte Kanten beſtimmt werden, ſtimmen in ihren Seiten überein und ſind congruent).

10.) Eine durch zwei Gegenkanten gelegte Ebene geht durch den Mittelpunct C und halbirt den Winkel des Polyeders (was ſich aus Fig. 61 erſehen läßt).

Das reguläre **Tetraeder** iſt in obigen Betrachtungen nicht mitbegriffen. Es läßt ſich aber ohne Schwierigkeit zeigen, daß auch um und in dieſes eine Kugel beſchrieben werden kann.

§. 144.

Aufgaben.

Die regulären Polyeder bei gegebener Kante zu projiciren, wenn ein Eck A in der HE liegt, und die Axe, welche durch A und ſein Gegeneck B geht, ſenkrecht auf der HE ſteht.

Für die Auflöſung der einzelnen Fälle gelten folgende allgemeine Bemerkungen:

1.) Die Axe AB projicirt ſich als ein Punct (A oder h), von welchem die Projectionen der in A und B zuſammenſtoßenden Kanten auslaufen.

2.) Die Projectionen der genannten Kanten ſind gleich-lang (denn die Kanten haben nach §. 143, 8 einerlei Neigung gegen AB, alſo auch einerlei H-Neigung).

3.) Die Projection einer an B liegenden Kante fällt in die Verlängerung der Projection ihrer an A liegenden Gegenkante (denn beide Kanten haben dieſelbe projicirende Ebene).

4.) Die Winkel zwiſchen den Projectionen der von A und B ausgehenden Kanten ſind gleich (denn aus §. 143, 9 folgt, daß die Projectionen der von A ausgehenden Kanten gleiche Winkel zwiſchen ſich haben; dieſe Winkel werden aber durch die Projectionen der von B ausgehenden Kanten halbirt, da dieſe die Verlängerungen der erſtern ſind; oder es fallen die letztern Kantenprojectionen in die erſtern [beim Oktaeder]).

5.) Aus (2) und (4) erſieht man, daß die projicirten Endpuncte der von A und B ausgehenden Kanten immer ein reguläres Polygon beſtimmen, deſſen Mittelpunct A iſt.

§. 145.

Das Tetraeder

kommt hier nicht in Betracht, weil in ihm keine Axe durch zwei Ecken möglich iſt.

§. 146.

Das Hexaeder.

Fig. 62. Sind O die Endpuncte der drei von B ausgehenden und U die Endpuncte der von A ausgehenden Kanten, ſo beſtimmen die Projectionen o und u ein reguläres Sechseck, deſſen Seiten die Projectionen der übrigen Kanten des Würfels darſtellen.

Die Axe AB (die H-Diſtanz des Punctes B) iſt die Diagonale des Rechtecks AU_3BO_3, welches zu Seiten zwei Kanten des Hexaeders und zwei Diagonalen der Hexaederſeite hat. Macht man $\mathfrak{U}\mathfrak{A} = \mathfrak{U}\mathfrak{M} =$ der Hexaederkante und $\mathfrak{U}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{M}$ (Diagonale der Hexaederſeite), ſo iſt $\mathfrak{A}\mathfrak{U}\mathfrak{B}$ die Hälfte jenes Rechtecks, daher $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = AB$. Wird noch

Digitized by Google

$\mathfrak{U}\mathfrak{B} \perp \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ gefällt, ſo zeigt $\mathfrak{U}\mathfrak{B}$ die Länge für die H-Projectionen der Hexaederkanten (oder den Halbmeſſer des um das Sechseck $o_1 u_2 o_3$ ... beſchriebenen Kreiſes), wodurch die H-Projection des Hexaeders ſelbſt beſtimmt iſt. Ferner iſt $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ die H-Diſtanz der Puncte U und $\mathfrak{V}\mathfrak{B}$ die H-Diſtanz der Puncte O (denn denkt man ſich das ganze Rechteck gezeichnet und $\mathfrak{O}\mathfrak{W} \perp \mathfrak{O}\mathfrak{B}$ gezogen, ſo iſt $\mathfrak{A}\mathfrak{W} = \mathfrak{V}\mathfrak{B}$).

§. 147.

Das Oktaeder

bildet in der H-Projection ein Quadrat ſammt ſeinen beiden Diagonalen. Die H-Diſtanz für A iſt Null; die H-Diſtanz für B iſt der Diagonale des Quadrats gleich; die H-Diſtanz der übrigen Ecken iſt die halbe Diagonale.

§. 148.

Das Dodekaeder.

Die Projectionen der Kanten AD und BE liegen ſo, daß Fig. 63.
die Endpuncte d und e ein reguläres Sechseck beſtimmen. Das Dreieck $d_1 d_2 d_3$ iſt die Projection des horizontal liegenden regulären Dreiecks $D_1 D_2 D_3$, welches zur Seite die Diagonale $\mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_3$ der Dodekaederſeite $\mathfrak{A}\mathfrak{D}_2 \mathfrak{U}_1$ ... hat. Mit dieſem Dreieck wird man daher die Zeichnung der Dodekaederprojection beginnen und dann den Mittelpunct A und die Puncte e beſtimmen. Die Kante $U_1 U_2$ liegt horizontal; ihre Projection zeigt ihre wahre Länge, iſt parallel mit $d_2 d_3$ und wird durch eine aus A auf ſie gefällte Senkrechte Ap halbirt; man kann demnach dieſe Projection zeichnen, wenn man ihre Entfernung von A kennt, und dieſe wird folgendermaßen gefunden: Da Ap die Projection der Fünfeckshöhe $\mathfrak{A}\mathfrak{P}$ iſt, ſo iſt Aq die Projection von $\mathfrak{A}\mathfrak{Q}$; macht man daher

$$\mathfrak{A}'q = Aq$$
$$q\mathfrak{Q}' \perp \mathfrak{A}'q$$
$$\mathfrak{A}'\mathfrak{Q}' = \mathfrak{A}\mathfrak{Q},$$

ſo iſt $\angle \mathfrak{Q}'\mathfrak{A}'q$ die H-Neigung der AP (oder des Fünfecks $AD_2 U_1$ ....); verlängert man ferner $\mathfrak{A}'\mathfrak{Q}'$ und macht

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{P}' = \mathfrak{A}\mathfrak{P}$$
$$\mathfrak{P}'p \perp \mathfrak{A}'q,$$

ſo iſt 𝔄′p die Länge der Projection Ap von AP. Hiernach laſſen ſich die Projectionen u_1 und u_2 beſtimmen. Es müſſen aber die ſechs Fünfecke, welche zu dreien in A und B zuſammenſtoßen, congruente Projectionen haben; daher berührt ein mit Ap um A beſchriebener Kreis nicht allein die projicirte Kante u_1u_2, ſondern zugleich die Projectionen uu und oo der übrigen Kanten, welche in den genannten Fünfecken den Puncten A und B gegenüberliegen; die Berührungspuncte werden durch die Geraden d_1e_1, d_2e_2, ... beſtimmt, und wenn man von jedem dieſer Puncte nach beiden Seiten hin die halbe Dodekaederkante auf der Tangente abträgt, ſo erhält man die Puncte o und u. Die H-Projection des Körpers iſt nun leicht zu vollenden.

Die H-Diſtanz der Puncte D iſt 𝔔′q. Die Puncte U haben die H-Diſtanz 𝔓′p. Durchſchneidet man die verlängerte pu_2 von e_1 aus mit 𝔄𝔓 in v, ſo iſt vp der Abſtand der Puncte E von der Ebene der Puncte U, oder auch der Abſtand der Puncte D von der Ebene der Puncte O. Der Punct B hat von der Ebene $E_1E_2E_3$ dieſelbe Entfernung, wie A von der Ebene $D_1D_2D_3$. Daher ergeben ſich folgende H-Diſtanzen:

0	für	den Punct	A
𝔔′q	„	die Puncte	U
𝔓′p	„	„ „	O
𝔔′q + pv	„	„ „	E
𝔓′p + pv + 𝔔′q	„	den Punct	B

§. 149.

Das Ikoſaeder.

Fig. 64. Sind U die Endpuncte der von A ausgehenden und O die Endpuncte der von B ausgehenden Kanten, ſo beſtimmen die Puncte o mit den Puncten u ein reguläres Zehneck. Die Ebene der Puncte U liegt horizontal, und eben ſo die Ebene der Puncte O; daher zeigt jede Seite des Fünfecks $U_1U_2U_3$ ... oder $O_1O_2O_3$ ... die wahre Länge der Ikoſaederkante. Hiernach iſt die H-Projection des Körpers leicht zu zeichnen.

Digitized by Google

Die Höhe p der Pyramiden, welche durch die Ebenen UU.. und OO.. vom Ikoſaeder abgeſchnitten werden, iſt die Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, deſſen andere Kathete Au_1 und deſſen Hypotenuſe u_1u_2 iſt. Aehnlich findet man die Höhe t des trommelartigen Körpers, welcher nach Abzug der beiden Pyramiden vom Ikoſaeder übrig bleibt (entweder mittels der Linien u_1o_4 und u_1u_2, oder mittels der Linie u_1v und der wahren Höhe der Ikoſaederſeite). Dann hat man folgende H-Diſtanzen:

0	für den Punct	A
p	„ die Puncte	U
p + t	„ „ „	O
2p + t	„ den Punct	B

§. 150.

Aufgaben.

Die regulären Polyeder bei gegebener Kantenlänge zu projiciren, wenn eine Kante A_1A_2 in der HE liegt und die in dieſer Kante zuſammenſtoßenden Seiten gleiche H-Neigung haben.

Beim Tetraeder wird eine durch A_1A_2 gelegte verticale Ebene die gegenüberliegende Kante ſenkrecht halbiren. Bei den vier übrigen Körpern ſteht eine durch A_1A_2 und deren Gegenkante B_1B_2 gelegte Ebene vertical (was mittels §. 143, 10 zu erweiſen), ſo daß die Projection b_1b_2 der letztern Kante mit A_1A_2 zuſammenfällt. Die Projectionen der beiden in B_1B_2 aneinandergrenzenden Seiten ſind unter ſich congruent und fallen mit den Projectionen der beiden an A_1A_2 liegenden Seiten zuſammen.

151.

Tetraeder, Hexaeder und Oktaeder

zu projiciren, bleibt dem eigenen Nachdenken des Schülers überlaſſen.

Digitized by Google

§. 152.

Das Dodekaeder.

Fig. 65. Die an A_1A_2 liegenden Fünfecke ſeien mit den Buchſtaben A, U, D bezeichnet; die an B_1B_2 ligenden mit B, O, E.

Da die Puncte e auf die Puncte d fallen (§. 150), ſo ſtehen die Kanten D_1E_1 und D_2E_2 vertical, mithin auch die Ebenen der an ihnen liegenden vier Fünfecke, und dieſe projiciren ſich alſo auf die HE als gerade Linien dm. Die Linien A_1A_2, u_1u_2, u_3u_4 werden durch d_1d_2 ſenkrecht halbirt; U_1U_2 und U_3U_4 liegen horizontal, alſo auch U_1U_4 und U_2U_3; daher ſtellt jede Seite des Vierecks $u_1u_2u_3u_4$ die Diagonale der Dodekaederſeite in wahrer Größe dar, und das Viereck ſelbſt iſt ein Quadrat. Die Kanten M_1M_2 und M_3M_4 müſſen (da ſie mit U_2U_3 und U_1U_4 parallel ſind) horizontal liegen und ſich in wahrer Größe projiciren. Eine durch die vier Puncte M geführte Ebene halbirt die Kanten D_1E_1 und D_2E_2 ſenkrecht, liegt alſo ſelbſt horizontal. Die Linie m_1d_1 ($= m_3d_1 = m_4d_2 = m_2d_2$) ſtellt die Höhe der Dodekaederſeite in wahrer Größe dar; o_2d_1 und o_2m_1 ſind die beiden Stücke dieſer Höhe, in welche ſie durch die Diagonale O_2U_2 zerlegt wird. Die verlängerte A_1A_2 halbirt m_1m_2 und m_3m_4 ſenkrecht in v und w; vw zeigt die wahre Länge der durch die Mittelpuncte von M_1M_2 und M_3M_4 gehende Axe, und d_1d_2 die Länge der Axe zwiſchen den Kanten D_1E_1 und D_2E_2; daher iſt $d_1d_2 = vw$ und beide halbiren ſich. — Die vorſtehenden Auseinanderſetzungen leiten nicht nur auf eine einfache Conſtruction der H-Projection, ſondern auch auf mehrere Proben für die Genauigkeit dieſer Conſtruction. Man wird zuerſt das Quadrat $u_1u_2u_3u_4$ zeichnen, dann die Puncte A beſtimmen, hierauf die Puncte d und endlich die Puncte m. (Iſt $\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2\mathfrak{D}_3$ .. [Fig. 63] der Dodekaederſeite congruent, ſo iſt $u_1u_2 = \mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3$; d_1 iſt der Durchſchnittspunct zweier um u_1 und u_2 beſchriebener Bögen vom Halbmeſſer $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$; m_1 findet man, wenn man d_1u_2 zieht und um das Stück $\mathfrak{A}\mathfrak{Q}$ verlängert u. ſ. w.)

Digitized by Google

Legt man eine VE durch D_1E_1 unter gleichen Winkeln gegen die in D_1E_1 zuſammenhängenden Seiten (alſo parallel mit A_1A_2), ſo hat gegen dieſe das Dodekaeder ganz dieſelbe Stellung, wie gegen die HE; daher wird die V-Projection deſſelben ſeiner H-Projection congruent ſein und ſich von letzterer nur in der Lage gegen den Grundſchnitt unterſcheiden. Denkt man ſich nämlich eine der H-Projection congruente Figur über dem Grundſchnitt d_1g ſo gezeichnet, daß m_1m_2 in d_1g und v in d_1 fällt, ſo iſt dieſe Figur die V-Projection. Hieraus erſieht man, daß die H-Diſtanzen der Dodekaederecken unmittelbar auf der Geraden vw abgenommen werden können, und zwar in folgender Art:

0	iſt	die	H-Diſtanz	der	Puncte	A
vs	"	"	"	"	"	U
vb_2	"	"	"	"	"	D
vc	"	"	"	"	"	M
vb_1	"	"	"	"	"	E
vt	"	"	"	"	"	O
vw	"	"	"	"	"	B

(Wie hat man in §. 141 die VE anzunehmen, damit die V-Projection der Figur 65 ähnlich werde?)

§. 153.

Das Ikoſaeder.

Sind U die Spitzen der an A_1A_2 liegenden und O die Spitzen der an B_1B_2 liegenden Dreiecke, ſo fallen die Projectionen o in die Projectionen u; die Kanten O_1U_1, O_2U_2 und die durch ſie gehenden Ebenen ſtehen vertical, weshalb ſich die in dieſen Ebenen liegenden zwei Paar Dreiecke als gerade Linien projiciren, welche paarweiſe unter dem Winkel des Ikaſoeders zuſammenſtoßen. Die Spitzen M jener vier Dreiecke liegen in der Ebene, welche die Kanten O_1U_1 und O_2U_2 ſenkrecht halbirt; ſie haben alſo einerlei H-Diſtanz, und die Projectionen m_1m_2, m_3m_4 zeigen die wahre Länge der Körperkante. Zugleich werden dieſe Projectionen von der verlängerten A_1A_2 ſenkrecht halbirt (wie leicht zu erweiſen). Die Endpuncte der fünf von M_1 ausgehenden Kan- Fig. 66.

Digitized by Google

ten liegen in einer verticalen Ebene, und eben ſo die Endpuncte der fünf Kanten, welche im Gegenpuncte M_4 zuſammenkommen; denn die beiden durch dieſe Endpuncte beſtimmten Fünfecke ſind die Baſen der zwei Pyramiden, deren Spitzen M_1 und M_4 ſind, und es wurde früher (§. 149) gezeigt, daß die Ebenen dieſer Baſen ſenkrecht auf der durch beide Spitzen gehenden Axe ſtehen; dieſe Axe M_1M_4 liegt aber hier horizontal, weshalb jene Ebenen ſenkrecht zur HE ſein müſſen. Dasſelbe gilt von den Ebenen der Fünfecke, welche mit den Puncten M_2 und M_3 zwei andere Pyramiden beſtimmen. Man ſieht hieraus, daß die Projectionen der erwähnten vier Fünfecke vier gerade Linien o_1m_2, o_2m_3, o_1m_4, o_2m_1 geben. Endlich iſt $o_1o_2 = vw =$ der zwiſchen Gegenkanten liegenden Axe, und dieſe Länge ergiebt ſich als Diagonale des regulären Fünfecks, welches durch die Endpuncte der von B_2 ausgehenden Kanten beſtimmt wird. Mit Hülfe dieſer Axe kann man nach den obigen Erläuterungen die H-Projection des Ikoſaeders herſtellen. (Bei genauer Zeichnung muß $o_1m_1 =$ der Höhe der Ikoſaederſeite und $o_1m_2 =$ der Höhe des mehrerwähnten Fünfecks ſein).

Wird eine VE durch U_1O_1 ſenkrecht zur Ebene $O_1U_1O_2U_2$ gelegt, ſo muß die V-Projection des Körpers der H-Projection congruent ſein, und man überzeugt ſich auf dieſelbe Weiſe, wie vorhin beim Dodekaeder, daß auf vw die H-Diſtanzen ſämmtlicher Ecken angezeigt ſind. Es iſt nämlich

0	die	H-Diſtanz	der	Puncte	A	
vb_2	"	"	"	"	U	
vc	"	"	"	"	M	
vb_1	"	"	"	"	O	
vw	"	"	"	"	B.	

(Wie müßte man in §. 149 die VE legen, um eine der Fig. 66 ähnliche V-Projection zu erhalten?)

§. 154.

Zur Uebung:

1.) Man projicire das Tetraeder, das Hexaeder und das Oktaeder ſo, daß jedesmal die V-Projection der H-Projection congruent iſt.

Digitized by Google

2.) Man zeichne den Winkel jedes regulären Polyeders, ohne ein Dreikant aufzulöſen, und ohne die Projectionen des Körpers zu benützen.

3.) Für jedes reguläre Polyeder werde der Halbmeſſer der einbeſchriebenen und der umbeſchriebenen Kugel geſucht.

§. 155.

Aufg. Einen Körper, deſſen Beſtimmungsſtücke gegeben ſind, zu projiciren, wenn ſeine Stellung gegen die Grundebenen in folgender Weiſe vorgeſchrieben iſt:

1.) Die Ebene einer beſtimmten Seite Z hat eine gegebene H-Neigung α;

2.) eine beſtimmte Kante K in dieſer Seite bildet mit der H-Spur der Ebene einen gegebenen Winkel φ;

3.) Die H-Spur der Ebene ſchließt mit dem Grundſchnitt einen gegebenen Winkel ψ ein.

Aufl. Durch die Angaben (1) und (2) iſt die Stellung des Körpers gegen die HE, alſo auch die Figur der H-Projection beſtimmt; und indem die Angabe (3) hinzukommt, beſtimmt ſich auch die Figur der V-Projection. Nur die Entfernungen der beiden Projectionen vom Grundſchnitt bleiben willkührlich, da man die Grundebenen noch in beliebigen Abſtänden vom Körper annehmen kann. (Sollen auch dieſe Abſtände beſtimmte Werthe haben, ſo müſſen für ein beſtimmtes Eck beide H-Diſtanzen gegeben ſein. Man kann dieſe Beſtimmungen leicht ſpäter noch hinzutreten laſſen, wenn einmal die Figuren der Projectionen gefunden ſind.)

Man projicire zuerſt den Körper auf die Ebene der Seite Z, als HE, beſtimme die H-Diſtanzen der Ecken, und ändere dann die gegenſeitige Stellung des Körpers und der HE nach vorgeſchriebener Weiſe, entweder dadurch, daß man den Körper feſt denkt und der HE eine andere Lage giebt, oder durch Bewegung des Körpers bei unbewegter

Digitized by Google

HE. Hat man nach dieſer Aenderung die neue H-Projection und die neuen H-Diſtanzen gefunden, ſo nimmt man die VE in der angegebenen Lage hinzu, auf welcher dann die Projection leicht herzuſtellen iſt.

Um die Ausführung an einem Beiſpiele zu erläutern, ſei eine Pyramide ABCS gegeben, in welcher die Baſis ABC als die Seite Z gilt, AB als die Kante K. Die HE gehe durch das Eck A. — Man kann nun die Projectionen des Körpers auf doppeltem Wege erhalten.

Fig. 67. I.) Es ſei AO die H-Spur der Ebene ABC. Denkt man ſich dieſe Ebene ſammt der darauf ſtehenden Pyramide in die HE umgeklappt, ſo nimmt die Umklappung AB_1C_1 eine ſolche Lage ein, daß $\angle B_1AO = \varphi$. Man zeichne für dieſe Lage die H-Projection AB_1C_1s der Pyramide, beſtimme die H-Diſtanz h ihrer Spitze, und bewege hierauf die Ebene ABC wieder in ihre urſprüngliche Lage zurück. Dann fallen die neuen H-Projectionen der Ecken in die aus B_1, C_1, s auf AO gefällten Senkrechten. Führt man eine zu AO ſenkrechte VE AQ ein, ſo würde die V-Projection der Baſis vor der Zurückbewegung in den Grundſchnitt fallen; die V-Projection der Spitze läge in der Verlängerung der auf AQ ſenkrechten sm, und zwar von m um h entfernt, ſo daß man V-Projection der ganzen Pyramide leicht zeichnen könnte. Die Figur dieſer V-Projection kann ſich aber während jener Zurückbewegung nicht ändern, ſondern dreht ſich blos um A ſo, daß am Ende der Bewegung die Grundlinie Ac′ mit ihrer erſten Lage Ac′ in AQ den Winkel α einſchließt. Sie beſtimmt ſich daher, wenn man

$$\angle QAc' = \alpha$$
$$Ab' = Ab'$$
$$Ac' = Ac'$$
$$Am = Am$$
$$Ams' = 90^\circ$$
$$ms' = h$$

macht. Es iſt nicht nöthig, die V-Projectionen der Kanten zu ziehen, da man die V-Projectionen b′, c′, s′ der Ecken nur in der Abſicht geſucht hat, um aus ihnen (nach §. 41) die

zugehörigen H-Projectionen b, c, s abzuleiten. Sind dieſe gefunden, ſo vertauſche man die VE AQ mit der vorgeſchriebenen VE, welche die AO unter ∠ ψ ſchneidet, trage auf dieſe die V-Projectionen der Ecken über (nach §. 108) und führe die Projectionen der Pyramide vollſtändig aus.

II.) Iſt ABCs die Projection der Pyramide auf die Fig. 68.
Ebene der Baſis, mit welcher man anfänglich die HE zuſammenfallen läßt, und man zieht in dieſer Ebene die Gerade AO ſo, daß ∠ BAO = φ, ſo wird man, um der Aufgabe zu genügen, zunächſt die HE um AO ſo weit abwärts drehen, daß der Winkel zwiſchen ihr und der nach unten gekehrten Fläche der Baſis = α iſt. Um auf dieſer neuen HE die Projection angeben zu können, nehme man eine zu AO ſenkrechte VE zu Hülfe, welche die Ebene der Baſis in AQ ſchneiden ſoll. So lange die letztere als HE gilt, iſt AQ der Grundſchnitt, und man findet die zu ABCs gehörige V-Projection Ab′c′s′ nach §. 40. Die neue Lage der HE ſchneidet die VE nach A𝔔 ſo, daß ∠ QA𝔔 = α; für dieſen neuen Grundſchnitt A𝔔 bleibt die V-Projection der Pyramide dieſelbe; die H-Projection aber wird eine andere, und man findet ihre einzelnen Puncte b, c, s, nach §. 108. Auch die Lage der Linie AO ändert ſich; denn da ſie im Raume auf A𝔔 ſenkrecht iſt, ſo muß ſie auch ſenkrecht auf ihr bleiben, wenn das Grundſyſtem zur Zeichnungsebene aufgeklappt wird. Statt AO erſcheint daher A𝔒 (⊥ A𝔔).

Die vorgeſchriebene VE ſchneidet die A𝔒 unter dem Winkel ψ. Man zeichne ihren Grundſchnitt und trage auf ſie die Projectionen der Ecken aus der VE A𝔔 über (§. 108).

(Zur Übung gebe man den früher projicirten Körpern andere Stellungen gegen die Grundebenen und ſuche ihre neuen Projectionen.)

§. 156.

Aufg. Einen bekannten Körper auf eine Ebene central zu projiciren *), wenn ſeine Lage gegen dieſe Ebene, ſo wie die Lage des Projectionscentrums C gegeben iſt.

*) Vgl. §. 1.

Digitized by Google

Aufl. Die Natur des Körpers und ſeine Lage gegen die Grundebene ſei dadurch beſtimmt, daß man ſeine Orthogonalprojection auf dieſe Ebene kennt ſammt den G-Diſtanzen der einzelnen Ecken. Eben ſo ſei das Projectionscentrum C durch Orthogonalprojection und G-Diſtanz gegeben. *)

Verbindet man jene Grundebene mit einer zweiten unter einem rechten Winkel, und giebt auf dieſer die zweite Orthogonalprojection des Körpers und des Centrums C an (§. 40), ſo kann man für jede der verſchiedenen Geraden, welche von C aus nach den Ecken des Körpers gehen, beide Orthogonalprojectionen zeichnen (§. 29) und die Spur in der erſten Grundebene beſtimmen (§. 31). Jene Geraden ſind aber die centralen Projectionsſtrahlen, und durch richtige Verbindung ihrer Spuren geſtaltet ſich die Centralprojection des Körpers.

(In welchem Falle giebt es für einen oder den andern Eckpunct des Körpers gar keine Centralprojection?)

Zuſatz. Man wird nun auch folgende allgemeinere Aufgabe zu löſen verſtehen:

Es ſind die Orthogonalprojectionen eines Körpers und eines Puncts C gegeben. Man verlangt das Bild dieſes Körpers, welches auf einer durch ihre Spuren gegebenen Ebene E entſteht, wenn man den Körper von C aus central projicirt.

Am leichteſten iſt hier der Fall zu behandeln, wenn die Ebene E ſenkrecht auf einer Grundebene ſteht.

§. 157.

Aufg. Die ſchiefe Parallel-Projection **) eines bekannten Körpers auf eine Ebene zu zeichnen, wenn ſeine Lage gegen dieſe Ebene und die Richtung der Projectionsſtrahlen beſtimmt iſt.

---

*) Es verſteht ſich, daß bei jeder G-Diſtanz auch immer angegeben iſt, auf welche Seite der Grundebene ſie ſich bezieht.

**) Vgl. §. 1.

Digitized by Google

Aufl. Der Körper ſei in Beziehung auf die vorliegende Grundebene wieder durch die Orthogonalprojectionen und die G-Diſtanzen ſeiner ſämmtlichen Ecken gegeben; ferner ſei die Orthogonalprojection und die G-Neigung *) einer Geraden G bekannt, mit welcher die ſchiefen Projectionsſtrahlen parallel laufen.

Man nehme, wie in der vorigen Aufgabe, eine zweite Grundebene ſenkrecht zur erſten an, zeichne auch auf dieſer die Orthogonalprojection des Körpers (§. 40) und der Geraden G (vgl. §. 70, 1), ziehe für den ſchiefen Projectionsſtrahl jedes Körperecks die beiden Orthogonalprojectionen (§. 30), beſtimme die Spuren dieſer Projectionsſtrahlen auf der erſten Grundebene, und ſtelle durch gehörige Verbindung der einzelnen Spuren die verlangte Projection des Körpers her.

Zuſatz. Es läßt ſich auch hier eine allgemeinere Aufgabe anreihen, deren Löſung leicht gefunden wird.

C. Schnitte der Polyeder durch Ebenen.

§. 158.

Wird ein gegebenes Polyeder durch eine gegebene Ebene geſchnitten, ſo erhält man die Projectionen der Durchſchnittsfigur, wenn man die Schnittlinien dieſer Ebene mit den Ebenen der Polyederſeiten projicirt (§. 44) und von denſelben nur diejenigen Stücke nimmt, welche durch die Kanten des Polyeders begrenzt werden; oder wenn man die Schnittpuncte der Polyederkanten mit der gegebenen Ebene ſucht (§. 45) und gehörig verbindet. Die wahre Durchſchnittsfigur läßt ſich nach §. 120 finden.

Die Löſung der hieher gehörigen Aufgaben wird am einfachſten, wenn die Schnittebene ſenkrecht auf einer Grundebene ſteht. Denn dann fällt eine Projection der Schnittfigur in die Spur der Ebene und die Umklappung der Figur mit der Ebene läßt ſich bequem ausführen (vgl. §. 57. †, ††).

---

*) Zur Vermeidung jeder Zweideutigkeit muß noch bemerkt ſein in welchem Sinne der Neigungswinkel gezählt wird.

Digitized by Google

§. 159.

Aufg. In einer Seite F eines gegebenen geraden Prisma's iſt eine Gerade parallel mit der Baſis gezogen und durch dieſe Gerade eine Ebene unter gegebener Neigung φ gegen die erwähnte Seite F gelegt. Man ſoll das Netz des Körpers zeichnen, welcher durch die Ebene vom Prisma abgeſchnitten wird.

Aufl. Legt man die HE durch die Baſis des Prisma's und die VE ſenkrecht zur Seite F, ſo ſteht auch die Schnittebene ſenkrecht zur VE; ihre V-Spur bildet mit dem Grundſchnitt den Winkel $90° - \varphi$ und enthält die V-Projectio des Schnitts; die H-Projection desſelben iſt die Baſis des Prisma's.

Die horizontale Umklappung der Schnittfigur mit ihrer Ebene ergiebt ſich nach §. 57, ††. Die übrigen Seiten des abgeſchnittenen Körpers ſind ganz leicht zu erhalten, ſo daß die Herſtellung des Netzes keine Schwierigkeit hat.

§. 160.

Aufg. Ein ſchiefes Prisma ſenkrecht zu den parallelen Kanten zu ſchneiden und das Netz zu zeichnen.

Aufl. Man lege die HE durch die Baſis, die VE parallel zu den Seitenkanten, zeichne die Spuren der Schnitebene (§. 24), beſtimme die H-Projection des Schnitts (§. 41) und mittels derſelben die Schnittfigur ſelbſt. Die übrigen Seiten des Netzes ſind rechtwinkelige Trapeze, deren Baſen Seitenlinien der Schnittfigur und deren parallele Seiten aus der VE zu entnehmen ſind (§. 26).

Iſt das Prisma dreiſeitig, ſo kann man das Netz auch leicht dadurch erhalten, daß man die gebrochene Oberfläche des Prismas in eine Ebene ausbreitet (d. h. die drei Seitenparallelogramme conſtruirt und aneinanderlegt) und die parallelen Kanten durch eine Gerade ſenkrecht ſchneidet. Dann ergeben ſich ſogleich die Trapeze, welche die Seiten des abgeſchnittenen Körpers bilden; und wenn man aus

Digitized by Google

den in dieſe Trapeze fallenden Stücken jener Geraden ein Dreieck conſtruirt, ſo hat man die Schnittfigur.

§. 61.

Aufg. Eine Pyramide, deren Beſtimmungsſtücke gegeben ſind, wird durch eine Ebene geſchnitten, welche drei beſtimmte Seitenkanten in gegebenen Entfernungen von der Spitze trifft. Man ſoll den Schnitt projiciren und das Netz der abgeſtumpften Pyramide zeichnen.

Aufl.

A.) Iſt die Pyramide dreiſeitig, ſo klappe man zwei Seiten in die Ebene der Baſis um, trage auf den umgeklappten Kanten die gegebenen Entfernungen ab und vollende das Netz. Durch Zurückbewegung der Seiten findet man die Projectionen der drei Schnittpuncte auf die Baſis, alſo auch die Projection der Schnittfigur.

B.) Hat die Pyramide mehr als drei Seiten, aber die gegebenen Puncte, durch welche die Schnittebene gehen ſoll, liegen auf drei benachbarten Kanten, ſo läßt ſich die Aufgabe in ähnlicher Weiſe behandeln, wie die des §. 134; oder auch ſo, wie im folgenden Falle.

C.) Die Pyramide habe eine größere Seitenzahl, und von den drei Kanten, auf denen die Schnittpuncte X, Y, Z gegeben ſind, liege keine unmittelbar neben der andern.

Sind AS, CS, ES dieſe Kanten, ſo lege man durch je zwei derſelben eine Ebene, wodurch eine dreiſeitige Pyramide entſteht, welche ACE zur Baſis hat. Von dieſer Pyramide klappe man zwei Seiten um, etwa ACS und AES, trage auf den umgeklappten Kanten die gegebenen Entfernungen $S_1X_1 = S_2X_2$, S_1Y_1, S_2Z_1 ab, ziehe Y_1X_1, Z_1X_2 und verlängere ſie, bis CA und EA in P und Q geſchnitten werden; dann iſt PQ die H-Spur der Schnittebene XYZ. Nun lege man die VE ſenkrecht zu PQ, zeichne die V-Projection der Pyramide, beſtimme die H-Projection eines der Schnittpuncte X, Y, Z, etwa x, ſammt der zugehörigen V-Projection x′ (§. 41), und verbinde x′ mit dem Puncte O, Fig. 69.

wo PQ den Grundſchnitt trifft, ſo hat man die V-Spur OP′ der Schnittebene XYZ. Die Schnitte der OP′ mit den V-Projectionen der Pyramidenkanten ſind die V-Projectionen der Puncte, in denen die Ebene XYZ dieſe Kanten trifft; die zugehörigen H-Projectionen ſucht man nach §. 41.

(Genauigkeitsproben: die ſo gefundenen H-Projectionen y und z müſſen zugleich in die aus Y_1 und Z_1 auf AC und AE gefällten Senkrechten fallen. — P, x, y müſſen in gerader Linie liegen; eben ſo Q, x, z.)

Nachdem nun die Projectionen der Schnittfigur bekannt ſind, kann man leicht dieſe Figur ſelbſt mit der Ebene XYZ umklappen, und auch die übrigen Stücke des Körpernetzes durch horizontale Umklappung der Seiten finden.

§. 162.

Aufg. Von einer Pyramide iſt außer der Baſis ABC ... noch eine Seite ABS ſammt der Neigung α dieſer Seite gegen die Baſis gegeben. Die Pyramide wird durch eine Ebene abgeſtumpft, welche der Seite ABS nach der Linie XV unter dem Winkel φ begegnet. Man ſoll das Netz des Körpers zeichnen.

Fig. 69. Aufl. Man lege die HE durch die Baſis, zeichne an AB die Umklappung ABS_3 der Seite ABS, ſuche die H-Spur R der (in X_0V_0 umgeklappten) Linie XV, ſo hat man einen Punct für die H-Spur der Schnittebene. Dieſe Spur PQ läßt ſich als die Kante eines Dreikants auffaſſen, deſſen beide andere Kanten die Linien RB und RV ſind, und von welchem man eine Seite BRV_0 und zwei Winkel α und φ kennt. Sucht man daher (nach §. 96) die Seite BRQ dieſes Dreikants, ſo kann man RQ ziehen. Nun lege man die VE ſenkrecht zu RQ, zeichne beide Projectionen der vollſtändigen Pyramide und beſtimme die Projectionen eines der Puncte X, V. Durch die V-Projection deſſelben geht die V-Spur der Schnittebene. Das weitere Verfahren iſt daſſelbe, wie bei der vorigen Aufgabe.

Digitized by Google

§. 163.

Uebungsaufgaben.

1.) Ein gegebenes Prisma ſo zu ſcheiden, daß drei beſtimmte Kanten in gegebenen Puncten getroffen werden.

2.) Einen gegebenen Körper ſo zu ſchneiden, daß eine beſtimmte Kante ſenkrecht halbirt wird.

3.) Ein rechtwinkeliges Parallelepiped } durch
4.) Ein ſchiefwinkeliges Parallelepiped } eine Ebene zu ſchneiden, welche gegen zwei beſtimmte Seiten gegebene Neigungen und von einem beſtimmten Eck eine gegebene Entfernung hat.

§. 164.

Aufg. Ein dreiſeitiges Prisma ſo zu ſchneiden, daß die Schnittfigur einem gegebenen Dreieck ähnlich iſt und durch einen auf dem Prisma gegebenen Punct geht.

Aufl.

A.) Iſt das Prisma gerade, ſo lege man die HE durch die Baſis, welche dann ſogleich die H-Projection des Schnittes vorſtellt, und löſe die Aufgabe des §. 125. Hat man ſo die Lage der Schnittebene gefunden, ſo kann man die Puncte beſtimmen, in denen die einzelnen Kanten geſchnitten werden, und das Netz herſtellen.

Die Spitzen der Winkel W_1, W_2, W_3 in dem gegebenen Dreieck (welchem der Schnitt ähnlich werden ſoll) können ſich unter die drei Kanten K_1, K_2, K_3 des Prismas auf ſechs verſchiedene Arten vertheilen, nach folgendem Schema:

K_1	K_2	K_3
W_1	W_2	W_3
W_1	W_3	W_2
W_2	W_3	W_1
W_2	W_1	W_3
W_3	W_1	W_2
W_3	W_2	W_1

Jedem ſolchen Falle entſprechen (nach Aufg. §. 125) zwei Lagen der Schnittebene, ſo daß in Allem $6 . 2 = 12$ Auflöſungen möglich ſind.

Digitized by Google

†) Iſt das gegebene Dreieck gleichſchenkelig (z. B. $W_2 = W_3$), ſo reducirt ſich die Anzahl der Auflöſungen auf 3. 2 = 6.

††) Iſt das Dreieck gleichſeitig ($W_1 = W_2 = W_3$), ſo giebt es nur 1. 2 = 2 Auflöſungen.

B) Iſt das Prisma ſchief, ſo ſuche man ſeinen ſenkrechten Durchſchnitt (§. 160) und nehme ihn für die Baſis. Dadurch wird das Prisma zu einem geraden, und die weitere Behandlung der Aufgabe iſt dieſelbe wie vorhin. *)

§. 165.

Aufg. Ein Prisma, deſſen Baſis ein Parallelogramm iſt, ſo zu ſchneiden, daß die Schnittfigur einem gegebenen Parallelogramme ähnlich iſt und durch einen gegebenen Punct des Prisma's geht.

Aufl. Man halbire das Prisma durch eine Diagonalebene und das gegebene Parallelogramm durch eine Diagonale. Schneidet man die dreiſeitige Prismenhälfte ſo, daß der Schnitt dem halben Parallelogramm ähnlich wird (§. 164) ſo iſt die Schnittebene die verlangte.

Fig. 70. Es ſei KLMN die gegebene Geſtalt des Schnittes und ABCD der ſenkrechte Durchſchnitt des gegebenen Prisma's (alſo die Projection des Schnitts); die Diagonalebene gehe durch AC. Nun kann ∠ B ſowohl die Projection des Winkels L, als auch die des Winkels K ſein, je nachdem man die Diagonale KM oder die Diagonale LN der Diagonalebene des Prisma's entſprechen läßt. Soll das dreiſeitige Prisma über ABC nach einer dem Dreieck KLM ähnlichen Figur geſchnitten werden, ſo können hier von den 6 Paar Auflöſungen, deren die Aufgabe des §. 164 im Allgemeinen fähig iſt, blos 2 Paar in Anwendung kommen (da die Winkelſpitze L nur auf die Kante B fallen kann); daſſelbe gilt

*) Bei dieſer und der folgenden Aufgabe dürfen auch nöthigenfalls die Seitenebenen des Prisma's über eine Baſis hinaus verbreitet werden.

Digitized by Google

auch im andern Falle, wenn der Schnitt des Prisma's ABC dem Dreieck LNK ähnlich ſein ſoll; und hieraus folgt, daß für die gegenwärtige Aufgabe die Zahl der möglichen Auflöſungen 4 . 2 = 8 iſt. Zur Ueberſicht derſelben dient nachſtehendes Schema (wo unter B, t, u immer diejenigen Winkel in einer Reihe ſtehen, als deren Projectionen jene erſcheinen können).

B	t	u
L	v	w
L	w	v
K	x	y
K	y	x

†) Iſt KLMN ein Rechteck (K=L, x=v, y=w) oder ein Rhombus (v=w, x=y), ſo ergeben ſich nur 2 . 2 = 4 Auflöſungen; und ihre Anzahl kommt auf 1 . 2 = 2 herab, wenn KLMN ein Quadrat (L=K, v=w=x=y) iſt.

D. Schnitte der Polyeder unter ſich.

§. 166.

Der Schnitt eines Polyeders durch ein zweites giebt in den meiſten Fällen eine Figur, deren Seitenlinien in verſchiedenen Ebenen liegen.

Verſchwindet bei einem ſolchen Durchſchnitt ein Theil des einen Polyeders ganz im zweiten, ohne an einer andern Stelle wieder zum Vorſchein zu kommen, ſo ſagt man, das erſte dringe ein in das zweite. Fällt ein Stück des einen ganz innerhalb des zweiten, doch ſo, daß die Endſtücke des erſten beiderſeits aus letzterem vorragen, ſo durchdringt das erſte das zweite. (Fig. 73). Nimmt jedes ein Stück vom andern hinweg, ohne daß das eine an irgend einer Stelle vom andern ganz umſchloſſen wird, ſo ſchneiden ſich beide gegenſeitig aus. (Fig. 71). Im erſten und letzten Falle iſt die Schnittfigur eine einzige gebrochene, in ſich geſchloſſene Linie; im zweiten beſteht ſie aus getrennten Stücken.

Digitized by Google

Sind die beiden Polyeder durch ihre Projectionen gegeben, ſo erhält man die Projectionen des Schnitts, wenn man entweder die Geraden projicirt, nach denen die Seiten des erſten Polyeders die Seiten des zweiten ſchneiden, aber immer nur das Stück einer ſolchen Geraden beibehält, welches innerhalb der ſich ſchneidenden Seiten beider Polyeder zugleich liegt; oder wenn man die Puncte, in denen die Seiten des erſten von den Kanten des zweiten getroffen werden, mit den Puncten, in welchen die Kanten des erſten den Seiten des zweiten begegnen, in gehöriger Ordnung verbindet. Wie man ſich hiebei zu benehmen habe, um einer zu verwickelten Zeichnung auszuweichen, ſoll an einigen Beiſpielen gezeigt werden.

§. 167.

Aufg. Ein Prisma und eine Pyramide ſind durch ihre Projectionen gegeben. Man ſoll ihren Durchſchnitt projiciren, und die Seiten der Schnittfigur auf dem Netze jedes Körpers angeben.

Fig. 71. Aufl. Die h-projicirende Ebene der Kante DG des Prisma's ſchneidet drei Kanten AC, AS, AB der Pyramide in den Puncten U, V, W, deren H-Projectionen die Puncte u, v, w ſind, und deren V-Projectionen man nach §. 41 findet; die Pyramide ſelbſt wird alſo durch jene projicirende Ebene nach einem Dreieck UVW geſchnitten, und die Puncte, in denen die Kante DG die Pyramide trifft, können nirgend anders liegen, als in den Seiten dieſes Dreiecks. Zeichnet man ſeine V-Projection v'u'w', ſo findet man die V-Projectionen p^{I}, p^{II} dieſer Puncte, und hieraus auch (nach §. 41) die H-Projectionen p_1, p_2. Eben ſo ergeben ſich die Puncte (p_3, p^{III}), (p_4, p^{IV}), in welchen die Pyramide von der Prismenkante EH geſchnitten wird. Wendet man daſſelbe Verfahren auch auf die Kante FJ an, ſo wird man finden, daß ihre V-Projection f'i' die V-Projection der Figur, nach welcher ihre h-projicirende Ebene die Pyramide ſchneidet (und welche hier ein Viereck iſt), gar nicht trifft, woraus folgt, daß die Kante FJ ſelbſt neben der Pyramide hinläuft,

ohne ihr zu begegnen. — Die Puncte Q, in denen die Kanten der Pyramide die Seiten des Prisma's durchdringen, findet man auf ähnliche Weiſe. Die h-projicirende Ebene der Kante SB ſchneidet das Prisma nach einem Dreieck XYZ, deſſen V-Projection x′y′z′ von der V-Projection s′b′ jener Kante in den Puncten q^{I}, q^{II} getroffen wird; und wenn man (nach §. 41) die zugehörigen H-Projectionen q_1, q_2 beſtimmt, ſo hat man in (q_1, q^{I}), (q_2, q^{II}) die Schnittpuncte der Kante SB mit den Seiten GF und HF des Prisma's. Die Pyramidenkante SC begegnet den Prismenſeiten GF, HF in den Puncten (q_3, q^{III}), (q_4, q^{IV}). Die Kante SA trifft das Prisma gar nicht. Daß auch keine der Kanten an der Baſis ABC das Prisma ſchneiden kann, erſieht man unmittelbar aus den V-Projectionen der gegebenen Körper. — Es kommt nun noch darauf an, die erhaltenen Puncte P und Q gehörig durch Gerade zu verbinden, welche dann die Schnittlinien der Seiten beider Körper darſtellen. Hiebei beachte man, daß immer zwei ſolche Puncte verbunden werden müſſen, welche in einer und derſelben Seite des Prisma's und zugleich in einer und derſelben Seite der Pyramide liegen. Nun liegen z. B. die Puncte P_1 und P_3 beide in der Seite DH des Prisma's und beide in der Seite ASC der Pyramide; alſo iſt P_1P_3 der Schnitt jener Prismenſeite mit dieſer Pyramidenſeite. Eben ſo iſt P_3Q_4 der Schnitt von HF und ASC. Fährt man ſo fort, ſo findet man $P_1P_3Q_4Q_2P_4P_2Q_1Q_3P_1$ als Figur des Schnittes beider Körper.

(Es iſt klar, daß man zur Auffindung der Puncte P und Q ſtatt der h-projicirenden Ebenen der Kanten auch die v-projicirenden hätte anwenden können; oder auch die h-projicirenden Ebenen der Prismenkanten und die v-projicirenden der Pyramidenkanten; oder umgekehrt.)

Zeichnung des Netzes.

A.) Für die Pyramide. Iſt das Netz der vollſtändigen Pyramide entworfen (indem jedes Dreieck aus ſeinen drei Seiten conſtruirt wurde), ſo beſtimme man auf der

Digitized by Google

Kante SC die Puncte Q_3 und Q_4, indem man die wahren Längen von SQ_3 und SQ_4 ſucht, oder SC in Q_3 und Q_4 ſo theilt, daß

$$SQ_3 : SQ_4 : SC = sq_3 : sq_4 : sC.$$

Zieht man die Gerade sp_1r, theilt AC in R im Verhältniß von ar:rc und SR im Verhältniß von $sp_1 : p_1r$, ſo findet man im Dreieck SAC den Punct P_1; ähnlich erhält man den Punct P_3 und kann nun das Stück $P_1 P_3 Q_4 Q_3$ der Schnittfigur in der Seite SAC des Netzes zeichnen. Auf dieſelbe Weiſe trägt man die übrigen Stücke in die betreffenden Seiten über.

B.) Für das Prisma. Man ziehe die Gerade hq_2k, conſtruire das Dreieck HKJ aus ſeinen drei Seiten, theile KH in Q_2 im Verhältniß von $kq_2 : q_2h$, ſetze an JK ein Stück KF ſo, daß

$$FK : KJ = fk : ki$$

und vollende das Parallelogramm FH, ſo hat man eine Seite des Prisma's und in ihr einen Eckpunct Q_2 der Schnittfigur. Auf der Kante HE trage man die Puncte P_3 und P_4 auf. Um den vierten Punct in dieſer Seite zu erhalten, lege man durch q_4 eine Gerade, welche zugleich entweder durch ein Eck des Parallelogramms fh geht oder mit einer ſeiner Seitenlinien parallel läuft, trage dieſe Gerade in die Seite FH des Netzes über (wie vorhin bei der Pyramide mit der Geraden SR geſchah) und beſtimme auf ihr (mittels einer Proportionaltheilung) den Punct Q_4. — Eben ſo verfährt man in Bezug auf die übrigen Seiten des Netzes.

Man kann auch, wenn der Raum es geſtattet, für die Ebene jeder Seite der Pyramide oder des Prisma's die H-Spur ſuchen und in der horizontalen Umklappung der Ebene ſowohl die Ecken der Seite ſelbſt, als auch die Ecken der Schnittfigur (ſoweit ſie in dieſe Seite fällt) angeben.

§. 168.

Derſelbe Weg, welcher zur Auflöſung der vorſtehenden Aufgabe führt, läßt ſich bei jeder andern hieher gehörigen Aufgabe einſchlagen, die gegebenen Polyeder mögen ſein,

Digitized by Google

welche ſie wollen. Eben ſo paßt die zweite Auflöſung der nächſtfolgenden Aufgabe (§. 169) auch für andere Polyeder, als die dort betrachteten.

Bei gegebenen Pyramiden und Prismen laſſen ſich die auf den Seitenkanten liegenden Endpuncte der Schriftfigur noch durch ein anderes, den genannten Körpern eigenthümliches Verfahren finden, welches in §. 169 Aufl. I, §. 170 und §. 171 erläutert iſt.

§. 169.

Aufg. Den Schnitt zweier gegebenen Pyramiden zu projiciren.

A.) Die Baſen ABC, DEF beider Pyramiden liegen in der HE.

Aufl. I. Wird die eine Pyramide von einer Ebene geſchnitten, welche durch die Spitze gelegt iſt, ſo bildet der Schnitt ein Dreieck, deſſen Spitze in die Pyramidenſpitze fällt. Geht die Ebene zugleich durch eine Kante der andern Pyramide, ſo kann dieſe Kante die erſte Pyramide nirgendwo anders treffen, als in den Seiten jenes Dreiecks. Jede ſolche Ebene geht durch die Verbindungslinie ST beider Spitzen, ihre H-Spur alſo durch die H-Spur R dieſer Linie. Zieht man nun z. B. RC, ſo hat man die H-Spur einer Ebene, in welcher die Kante SC einer Pyramide und die Spitze T der andern liegt, und die Puncte M, N ſind die H-Spuren der beiden Geraden TM, TN, nach denen zwei Seiten (DTE und FTE) der Pyramide T von der Ebene geſchnitten werden (alſo iſt MNt die H-Projection des dreieckigen Schnitts der Ebene und der Pyramide); die Puncte p_2, p_8, in welchen die Projection der Cs den Projectionen Mt, Nt begegnet, ſind daher die Projectionen der Puncte P_2, P_8, in denen die Kante SC jene zwei Seiten der Pyramide durchdringt. Eben ſo kann man die H-Projectionen der Puncte finden, wo die übrigen Kanten der Pyramide S die Seiten der Pyramide T — und die Kanten der letztern die Seiten der erſtern treffen; und durch gehörige Verbindung der erhaltenen Puncte ergiebt ſich die H-Projection der Schnittfigur. (Bei Fig. 72.

der in der Figur 72 gewählten Lage der Pyramiden ſchneidet die eine Baſis die andere in den Puncten P_1, P_9, P_6, P_5, welche der Schnittfigur angehören müſſen).

Die V-Projection der Figur entſteht, wenn man die V-Projectionen der Eckpuncte ſucht (§. 41) und verbindet.

Aufl. II. Sind die Puncte p_2 und p_8 auf die oben angegebene Weiſe oder auch nach der Methode des §. 167 gefunden, ſo hat man auch die H-Projectionen P_1p_2, P_9p_8 für die Schnitte P_1P_2, P_9P_8 der Seite BCS mit den Seiten EFT und DET. Der Schnitt der Seite EFT mit der Seite ACS muß durch P_2 gehen und hat ſeine H-Spur in V, wo EF und AC ſich begegnen; daher iſt Vp_2 die Richtung ſeiner H-Projection; die Projection ſelbſt aber hat ihren Endpunct in p_3, wo ſie der proſicirten Kante tF begegnet, und zugleich iſt p_3 die Projection des Schnitts der Kante TF und der Seite ACS. Da nun die Kante TF auch der Seite DFT angehört, ſo geht der Schnitt der letztern mit ACS durch P_3; ſeine H-Spur iſt der Durchſchnitt W der AC und DF, ſeine H-Projection hat alſo die Richtung Wp_3p_4. Dadurch beſtimmt ſich die H-Projection des Puncts P_4, in welchen die Seiten DFT von der Kante AS getroffen wird, und ſomit auch die H-Projection p_4P_5 des Schnitts der Seiten DFT und ABS. — Vom zweiten Stücke der Schnittfigur iſt die Seitenlinie P_8P_9 bereits projicirt. Die Projection p_8p_7 würde man erhalten durch Verbindung des Punctes p_8 mit dem Durchſchnitt der CA und ED; da aber in der Fig. 72 dieſer Durchſchnitt in zu große Entfernung fällt, ſo beſtimme man den Punct p_7 nach Aufl. I, und verbinde ihn mit p_8 und p_6. (Die zur Auffindung deſſelben angewandte Schnittebene TSRA führt zugleich auch auf den Punct p_4, was als Genauigkeitsprobe dienen kann.)

Die V-Projection wird wie vorhin gefunden.

Zuſatz. Läge das Dreieck DEF ganz innerhalb des Dreiecks ABC, ſo würde der projicirte Schnitt der Pyramiden eine geſchloſſene Figur geben, und man müßte bei wiederholter Anwendung des in Aufl. II gelehrten Verfahrens

Digitized by Google

wieder auf denſelben Punct p. zurückkommen, von welchem man ausgegangen war. *)

B.) Liegen die Baſen nicht in der HE, ſo denke man ſich die gebrochene Oberfläche jeder Pyramide über die

---

*) Eine aufmerkſame Betrachtung des in der erſten Auflöſung angegebenen Verfahrens lehrt, daß man zur Zeichnung der H-Projection der Schnittfigur die V-Projectionen der Pyramiden nicht weiter nöthig hat, als um die H-Spur R der durch die Spitzen gehenden Geraden ST beſtimmen zu können; daß man daher immer dieſelbe H-Projection und alſo auch immer dieſelbe h-projicirende Fläche erhalten wird, wenn man die Spitzen der Pyramiden in den projicirenden Lothen Ss, Tt ſo verrückt, daß ihre Verbindungslinie wieder durch R geht. Nimmt man noch hinzu, daß man auf eine ähnliche Bemerkung gekommen wäre, wenn man irgend zwei andere Polygone in der HE als Baſen der Pyramiden vor ſich gehabt hätte, ſo ergiebt ſich folgender Lehrſatz:

Schneidet man zwei Parallellinien Ss, Tt durch eine beliebige Anzahl von Geraden, welche alle in einem und demſelben Puncte R zuſammenkommen, und läßt immer die auf einer und derſelben Parallelen gelegenen Schnittpuncte als Spitzen eines Syſtems von pyramidal gebrochenen Oberflächen gelten, deren gemeinſchaftliche Baſis in einer durch R gehenden und zu jenen Parallelen ſenkrechten Ebene beliebig angenommen iſt, ſo können die ſämmtlichen Pyramidalflächen der beiden Syſteme paarweiſe zuſammengefaßt werden, indem man immer zwei ſolche, deren Spitzen mit R in gerader Linie liegen, als ein Paar betrachtet. Giebt nun irgend ein ſolches Paar einen Durchſchnitt, ſo giebt auch jedes andere Paar einen Durchſchnitt, und die ſämmtlichen Durchſchnittsfiguren liegen auf einer prismatiſch gebrochenen Oberfläche, deren Kanten den Geraden Ss, Tt parallel ſind.

Digitized by Google

Baſis hinaus bis zur HE fortgeſetzt und zeichne ihre H-Spur (indem man die Spuren der Seitenkanten ſucht und verbindet). Dann kann man die Aufgabe in ähnlicher Weiſe behandeln wie vorhin, und hat nur zu beachten, daß alle jene Stücke der Schnittfigur, welche unter die urſprünglichen Baſen der Pyramiden hinabfallen, wegzulaſſen ſind.

Eine oder mehrere Seitenlinien der Schnittfigur können in einer Baſis ſelbſt liegen; es kann daher behufs der zweiten Auflöſung nöthig werden, außer den Spuren der gebrochenen Oberflächen auch die Spuren für die Ebenen der Baſen zu beſtimmen. Was die erſte Auflöſung betrifft, ſo reicht man mit dem in A gelehrten Verfahren auch hier völlig aus, falls keine der Baſenkanten einer Pyramide mit der andern Pyramide zum Durchſchnitt kommt. Läßt ſich aber nicht mit Sicherheit voraus ſehen, daß ein ſolcher Durchſchnitt unmöglich iſt, ſo wende man auf die Baſenkanten die Methode der in §. 167 enthaltenen Auflöſung an.

§. 170.

Aufg. Den Durchſchnitt zweier gegebenen Prismen M und N zu projiciren.

Fig. 73. Aufl. Der Anblick der gegebenen Projectionen von M und N zeigt, daß hier keine von den Kanten, welche den Baſen des einen Körpers angehören, den andern Körper trifft.

Legt man durch eine Kante AB des Prisma's M eine Ebene parallel zu den Kanten des Prisma's N (§. 49), ſo wird letzteres nach einem Parallelogramm VW geſchnitten, und die Puncte P_1, P_2, in welchen die Seitenlinien dieſes Parallelogramms von der Kante AB getroffen werden, ſind die Schnittpuncte dieſer Kante und der betreffenden Seiten des Prisma's N.

Hat man ſo die Puncte gefunden, in denen die ſämmtlichen Kanten von M die Seiten von N durchdringen, ſo ſuche man eben ſo die Schnitte Q der Kanten von N mit den

Digitized by Google

Seiten von M, und verbinde die erhaltenen Puncte in richtiger Ordnung *).

§. 171.

Aufg. Den Durchſchnitt einer gegebenen Pyramide mit einem gegebenen Prisma zu projiciren, deſſen beide Baſen ganz außerhalb der Pyramide liegen.

Aufl. Zieht man durch die Spitze der Pyramide eine Parallele L zur Seitenkante des Prisma's, ſo iſt jede durch L geführte Ebene den Prismenkanten parallel und kann daher das Prisma nur nach einem Parallelogramme ſchneiden. Geht eine ſolche Ebene zugleich durch eine Seitenkante der Pyramide, ſo ſind die Schnittpuncte dieſer Kante mit jenem Parallelogramm die Puncte, in denen die Kante die betreffenden Prismenſeiten durchdringt.

Eine Ebene durch L und eine Prismenkante ſchneidet die Pyramide nach einem Dreieck. Da, wo die Prismenkante dieſem Dreieck begegnet, durchdringt ſie die betreffenden Pyramidenſeiten.

Hat man ſämmtliche Kanten beider Körper auf obige Art behandelt, ſo iſt nur noch übrig, die erhaltenen Puncte gehörig zu verbinden **).

§. 172.

Nicht immer läßt ſich ſogleich vorausſehen, ob zwei durch ihre Projectionen gegebene Polyeder zum Durchſchnitt

*) Die H-Projection der Schnittfigur iſt nur von den H-Projectionen der Prismen abhängig und von der Richtung AV der H-Spuren, welche den durch die Prismenkanten geführten parallelen Schnittebenen zugehören. Hieraus läßt ſich (wie in §. 169) ein Lehrſatz ableiten.

**) Iſt die H-Spur der Linie L beſtimmt, ſo werden bei der Zeichnung der H-Projection der Schnittfigur die V-Projectionen der gegebenen Körper nicht weiter berückſichtigt; woraus abermals ein Lehrſatz folgt.

Digitized by Google

kommen oder nicht. Sind jedoch die gegebenen Körper Pyramiden oder Prismen, ſo iſt die Entſcheidung darüber bald gegeben, und aus den drei vorhergehenden §§ iſt das hiebei zu beobachtende Verfahren leicht abzunehmen.

Es wurde z. B. bei den in Fig 73 vorliegenden Prismen zuerſt die Richtung für die H-Spuren der mit ſämmtlichen Seitenkanten parallelen Schnittebenen beſtimmt. Hätte nun von den in dieſer Richtung gezogenen Spuren keine einzige die beiden (in der HE gelegenen) Baſen der Prismen zugleich ſchneiden können, ſo würden die Prismen ſelbſt keinen Durchſchnitt gegeben haben.

(Warum? — Wie kommt man bei den in §. 169, B und §. 171 aufgeführten Fällen zur Entſcheidung?)

Digitized by Google

Zweiter Abſchnitt.

Krumme Linien und krumme Flächen.

Digitized by Google

Digitized by Google

Zweiter Abſchnitt.

Erſtes Kapitel.

Von krummen Linien.

§. 173.

Gegenſtand mathematiſcher Betrachtungen kann eine krumme Linie nur dann ſein, wenn ſie nach einem beſtimmten Geſetze gebildet iſt. Von der Art dieſes Geſetzes hängt die Natur der Curve ſelbſt ab, und die Kenntniß deſſelben muß immer zugleich die Mittel zur Darſtellung der Curve liefern.

Die nächſte Folge jener Geſetzmäßigkeit in der Entſtehung einer Curve iſt Geſetzmäßigkeit der Form. Hat das Auge das Geſetz der Form erkannt, ſo reicht eine Anzahl von Puncten der Curve hin, um von ihr ſelbſt eine allgemeine Vorſtellung hervorzurufen.

§. 174.

Liegen alle Puncte einer Curve in einer Ebene, ſo wird die Curve eben oder einfachgekrümmt genannt; außerdem heißt ſie gewunden oder doppeltgekrümmt.

So wenig ein Stück einer ebenen Curve eine gerade Linie bilden kann, eben ſo wenig kann ein Stück einer gewundenen Curve in eine Ebene fallen; kommt eine krumme Linie vor, welche zum Theil in einer Ebene fortläuft und dann ſich aus derſelben erhebt, ſo iſt dieſe immer eine Zuſammenſetzung von zwei verſchiedenen Curven, deren jede ihr beſonderes Entſtehungsgeſetz hat.

Obgleich (wie eben bemerkt) kein noch irgend meßbarer Theil einer Curve geradlinig ſein kann, ſo iſt es doch mög-

Digitized by Google

lich, auf der Curve einen Bogen von ſo geringer Länge zu denken, daß die Abweichung des Bogens von der zu ihm gehörigen Sehne nicht mehr nachzuweiſen iſt. Ein Bogen, welcher unendlich klein iſt, d. h. kleiner als jede noch angebbare Größe, heißt ein Element der Curve, und es iſt erlaubt, ein ſolches Element für gerade zu nehmen. In dieſem Sinne ſtellt eine Curve die Grenze vor, welcher ſich eine in oder um ſie beſchriebene gebrochene Linie fortwährend nähert, wenn man ihre Bruchſtücke immer kleiner und deren Anzahl immer größer werden läßt. Vermehrt man z. B. die Seiten eines in einen Kreis beſchriebenen Polygons ohne Aufhören, ſo werden dieſe Seiten, welche Anfangs Sehnen des Kreiſes ſind, zu Elementen desſelben; ihre Menge überſteigt aber dann jede noch ſo große Zahl, oder ſie iſt unendlich groß. Eine ebene krumme Linie iſt die Grenze für eine in der Ebene liegende gebrochene; eine doppeltgekrümmte die Grenze für eine doppeltgebrochene, d. h. eine ſolche, von welcher irgend drei aufeinanderfolgende Bruchſtücke nicht in derſelben Ebene liegen; demnach können auch drei aufeinanderfolgende Elemente einer doppeltgekrümmten Linie im Allgemeinen nicht in einerlei Ebene liegen.

Eine Curve kehrt entweder in ſich ſelbſt zurück (wie der Kreis) und heißt dann eine geſchloſſene; oder ſie iſt nicht geſchloſſen, d. h. ſie ſetzt ſich ohne Ende fort und hat einen oder mehrere unendliche Zweige (wie z. B. die Curve in Fig. 87, welche ſowohl oberhalb als unterhalb der Geraden SN einen unendlichen Zweig hat). Beſteht eine Curve aus mehrern getrennten Theilen (wie z. B. in Fig. 89), ſo heißt jeder einzelne Theil ein Aſt der Curve.

§. 175.

Die Erklärung von einer Tangente, welche gewöhnlich in der Elementargeometrie bei Gelegenheit des Kreiſes gegeben wird, iſt für die höhere Geometrie zu eng, indem eine Gerade ſehr wohl nur einen einzigen Punct mit einer Curve gemein haben und doch keine Tangente ſein — aber auch eine Curve in einem Puncte berühren und zugleich in andern Punc-

Digitized by Google

ten ſchneiden kann. Um zu dem allgemeinen Begriffe einer Tangente an einer (ebenen oder gewundenen) Curve zu gelangen, lege man durch einen Punct A der Curve eine Gerade G, welche die Curve noch in einem zweiten Puncte B ſchneidet, und denke ſich dieſe Gerade ſo um A gedreht, daß der Schnittpunct B immer näher an A rückt. Hat man mit dieſer Drehung ſo lange fortgefahren, bis der Punct B auf den Punct A gefallen iſt, ſo ſtellt G eine Tangente der Curve dar und A iſt ihr Berührungspunct. Bei jener Drehung der Linie G wird der Winkel zwiſchen der Tangente in A und der Sehne AB äußerſt klein, wenn B ſehr nahe an A kommt, und kann als verſchwindend angeſehen werden, wenn B dem Berührungspuncte A unendlich nahe gekommen oder die Sehne AB zu einem Elemente der Curve geworden iſt; die Richtung des Elements, auf welchem A liegt, iſt demnach von der Richtung der Tangente in A nicht mehr zu unterſcheiden, und in dieſem Sinne ſagt man, die Tangente einer Curve ſei die Verlängerung eines Elements, oder eine Curve habe in jedem Puncte die Richtung ihrer Tangente. Der Winkel, unter welchem eine Curve eine Gerade oder eine Ebene ſchneidet, iſt alſo der Winkel zwiſchen dieſer Geraden oder Ebene und der durch den Schnittpunct gelegten Tangente der Curve. Den Winkel, unter welchem eine Curve eine andere ſchneidet, bringt man zur Anſchauung, wenn man durch den Schnittpunct an jede Curve eine Tangente zieht. Zwei Curven berühren ſich in einem Puncte, wenn ſie in dieſem Puncte eine gemeinſchaftliche Tangente haben.

Aus der obigen Erklärung einer Tangente geht hervor, daß die Tangente einer ebenen Curve ganz in der Ebene der Curve liegt; eine durch die Tangente geführte Ebene hat alſo mit einer ſolchen Curve entweder gar keinen außerhalb der Tangente gelegenen Punct gemein, oder ſie geht durch alle Puncte der Curve zugleich. Eine gewundene Curve aber wird von einer durch eine Tangente gelegten Ebene im Allgemeinen noch in Puncten geſchnitten, welche der Tangente nicht angehören. Durch Drehung der Ebene um die Tangente kann man einen dieſer Schnittpuncte dem Berührungspuncte

Digitized by Google

unendlich nahe rücken oder mit ihm zuſammenfallen laſſen, und dann heißt die Ebene eine Berührungs-Ebene der Curve. Die Berührungs-Ebene enthält zwei aufeinanderfolgende Elemente der gewundenen Curve.

Eine Gerade, welche eine Curve ſenkrecht ſchneidet (d. i. ſenkrecht auf der durch den Schnittpunct gehenden Tangente ſteht), heißt eine Normale der Curve, und die Ebene, in welche alle möglichen Normalen eines und desſelben Curvenpunctes fallen, eine Normal-Ebene. Diejenige Normale eines Punctes, welche bei einer einfachgekrümmten Curve in die Ebene der Curve, oder bei einer doppeltgekrümmten Curve in die Berührungs-Ebene des Punctes fällt, wird als Hauptnormale unterſchieden. Wenn bei einer ebenen Curve das Wort Normale ohne weitern Beiſatz gebraucht wird, ſo verſteht man darunter immer die Hauptnormale, indem andere Normalen hier ſeltener in Betracht kommen.

A.) Über ebene Curven.

§. 176.

Da die descriptive Geometrie wirkliche graphiſche Operationen nur an ſolchen Curven auszuführen hat, welche ganz in der Zeichnungsebene liegen, alſo nur an einfachgekrümmten, ſo iſt dieſe Klaſſe der Curven zunächſt einer nähern Betrachtung zu unterwerfen.

In dieſer von ebenen Curven handelnden Abtheilung hat man ſich nicht nur jede in Rede kommende Curve, ſondern auch alle Puncte und Linien, welche in Beziehung zu ihr treten, in der Zeichnungsebene zu denken.

§. 177.

Eine ebene Curve conſtruiren, heißt, ſo viele Puncte von ihr nach ihrem Bildungsgeſetze beſtimmen, daß man ihren Lauf deutlich erkennen und ſie ſelbſt aus freier Hand vollenden kann. Die richtige Zeichnung einer Curve ſetzt nicht blos eine geübte Hand voraus, ſondern auch ein wohlgeübtes Auge,

welches aus einer mäßigen Anzahl von Puncten ſich die Geſtalt der Curve vor dem wirklichen Ziehen zu abſtrahiren im Stande iſt, nach dem Ziehen aber Verſtöße gegen die Stetigkeit ihres Laufes ſogleich bemerkt, und ſieht, wie ſie zu corrigiren ſind.

Gewiſſe Curven ſind durch eine beſtimmte Anzahl von Peripheriepuncten völlig beſtimmt (ſo z. B. der Kreis durch drei Puncte). Iſt eine Curve durch nPuncte oder durch ein einbeſchriebenes n-Eck beſtimmt, und man zeichnet ein zweites n-Eck, welches dem vorigen ähnlich iſt, ſo kann man um dieſes nur eine Curve von der Art der vorigen beſchreiben, und dieſe Curve, welche die erſte in verjüngtem oder in vergrößertem Maßſtabe vorſtellt, heißt der erſten ähnlich. Ueberhaupt können zwei ähnliche Curven als die Grenzen zweier ähnlicher Polygone betrachtet werden. (Alle möglichen Kreiſe ſind unter ſich ähnlich).

Tangenten. Normalen.

§. 178.

In Beziehung auf die Peripherie einer ebenen Curve kann man eine convexe und eine concave Seite unterſcheiden, indem (wenn die Curve als Grenzfall einer gebrochenen Linie gilt) der Winkel zwiſchen je zwei aufeinanderfolgenden Elementen entweder $> 180°$ oder $< 180°$ erſcheint, je nachdem man ihn von der einen oder der andern Seite auffaßt. Die convexe Seite eines Winkels iſt aber diejenige, auf welche die Verlängerung eines Schenkels fällt; daher wird auch die Verlängerung irgend eines Curvenelements, d. h. die Tangente in irgend einem Puncte der Curve, wenigſtens anfänglich (in der Nähe jenes Elements) auf der convexen Seite der Curve liegen. Umgekehrt: wenn man von einer Geraden, welche mit einer Curve einen Punct T gemein hat, beweiſen kann, daß entweder alle ihre übrigen Puncte oder doch wenigſtens die in der Nähe von T rechts und links auf ihr genommenen Puncte auf der convexen Seite der Curve liegen, ſo iſt die Gerade eine Tangente der Curve und T der Berührungspunct.

Digitized by Google

Häufig wird verlangt, an eine Curve eine Tangente zu legen, und hiebei kann gegeben ſein 1.) der Berührungspunct, oder 2.) ein Punct außerhalb der Curve, durch welchen die Tangente gehen ſoll, oder 3.) eine Gerade, mit welcher ſie parallel läuft. Die Kenntniß der Eigenſchaften einer Curve lehrt auch immer ein Verfahren, wie man in dieſen drei Fällen die Tangente durch geometriſche Conſtructionen finden kann. Iſt aber blos die Peripherie einer Curve gegeben ohne nähere Bezeichnung ihrer Eigenſchaften, ſo erhält man durch entſprechendes Anlegen des Lineals die Richtung der Tangente mit demjenigen Grade von Genauigkeit, welcher bei Zeichnungsoperationen überhaupt gefordert werden kann. Nur über den Berührungspunct kann man in den beiden letztern der oben genannten Fälle in Ungewißheit ſein, indem bei geringer Krümmung der Curve die Tangente ſich ſo innig an jene anſchmiegt, daß ſie (auch bei großer Schärfe des Zeichnungsſtiftes) nicht ſowohl einen Punct, als vielmehr ein Stück der Peripherie ſelbſt mit ihr gemein zu haben ſcheint. Zu genauerer Beſtimmung des eigentlichen Berührungspunctes kann man ſich in vielen Fällen einer Hülfscurve bedienen.

Fig. 74. Iſt z. B. an die Curve in Fig. 74 vom Puncte T aus eine Tangente zu ziehen, ſo lege man durch T eine Anzahl gerader Linien, welche die Curve ſchneiden, halbire die Stücke dieſer Geraden, welche als Sehnen in die Curve fallen, und verbinde die ſämmtlichen Halbirungspuncte m durch eine ſtetige krumme Linie. Je mehr ſich die ſchneidende Gerade einer berührenden nähert, um ſo näher werden die beiden Grenzpuncte der auf ihr liegenden Sehne am Halbirungspuncte liegen, und für die Tangente ſelbſt fallen alle drei Puncte in einen einzigen zuſammen, nämlich in den Berührungspunct, welcher demnach ein Punct der Curve m′m″m‴.... ſein muß und ſich um ſo genauer beſtimmen wird, je deutlicher ſich der Zug dieſer Hülfscurve erkennen läßt; er iſt der Punct, wo die Hülfscurve auf die gegebene Curve ſtößt. (Trifft erſtere, rückwärts fortgeſetzt, die letztere in einem zweiten Punkte, ſo giebt es von T aus eine zweite

Digitized by Google

Tangente; oder fallen von einer durch T gehenden Geraden mehrere Stücke als Sehnen in die gegebene Curve, ſo ſind mehrere Hülfscurven und alſo auch mehrere Tangenten möglich.)

Noch beſſere Dienſte leiſtet eine Hülfscurve, welche ſich über die gegebene Curve hinaus fortſetzt, indem dann der Berührungspunct als wirklicher Durchſchnitt zweier Curven ſich ſichtbar machen muß. Eine ſolche Hülfscurve wird man im vorliegenden Falle erhalten, wenn man an jeden Punct der Curve eine Normale mit Genauigkeit ziehen kann. Sind n'f', n''f'',.... verſchiedene Normalen, und man fällt auf jede von T aus eine Senkrechte, ſo beſtimmen die ſämmtlichen Fußpuncte f', f'',... eine Curve *), welcher auch der Berührungspunct p angehören muß; denn die verlangte Tangente iſt eben die Senkrechte, welche aus T auf die durch den Berührungspunct p gehende Normale gefällt werden kann. — Weiß man aber die Normalen nicht zu conſtruiren, ſo läßt ſich folgender Weg einſchlagen. Man lege durch T eine beliebige Gerade, welche die Curve in zwei Puncten A,B ſchneidet, errichte in dieſen Puncten Senkrechte auf AB nach entgegengeſetzten Seiten hin, und gebe jeder die Länge der Sehne AB (nämlich Aq = Br = AB). Eben ſo verfahre man in Beziehung auf eine Anzahl anderer von T ausgehender Geraden und verbinde die Endpuncte (q, r) jener Senkrechten durch eine ſtetige Curve. Da, wo dieſe die gegebene Curve ſchneidet, liegt der Berührungspunct einer durch T gehenden Tangente Tp; denn denkt man ſich TBA um T ſo weit gedreht, bis ſie Tangente wird, ſo iſt AB = 0 geworden, alſo auch Aq = Br = 0.

Fig. 75.

Fig. 76.

Hat man an eine Curve eine Tangente parallel mit einer Geraden AB zu legen, ſo ziehe man eine Reihe von Sehnen parallel mit AB, halbire jede, und verbinde die Halbirungspuncte durch eine ſtetige Curve. Der Punct p, wo dieſe auf die gegebene Curve trifft, iſt (aus demſelben Grunde

*) Geht eine Normale nf durch T, ſo wird die Senkrechte Tf = 0, woraus erhellt, daß T auf der Hülfscurve liegt.

Digitized by Google

wie bei Fig. 74) der Berührungspunct der Tangente. (Man ſieht, wie im vorigen Falle, daß auch hier mehrere Tangenten möglich ſein können.) — Eine über die gegebene Curve hinausgehende Hülfscurve erhält man in gegenwärtigem Falle
Fig. 77. auf folgende Weiſe. Man lege durch eine Anzahl von Puncten c′, c″, c‴, ... der Curve nach einerlei Seite hin Tangenten und gebe allen gleiche Länge; durch den Endpunct t′ der erſten ziehe man in der der Curve zugekehrten Richtung eine Parallele t′d′ mit AB und mache t′d′ = t′c′; eben ſo verfahre man in Bezug auf alle übrigen Tangenten und laſſe die Parallelen mit AB immer nach derſelben Seite gerichtet ſein wie die erſte. Die Endpuncte d der Parallelen werden anfangs auf der concaven Seite der Curve liegen, endlich aber auf die convexe Seite fallen, ſo daß eine durch ſie geführte ſtetige Curve die gegebene Curve in irgend einem Puncte p ſchneiden muß, und dieſer Punct p iſt der Berührungspunct der verlangten Tangente; denn für letztere müſſen offenbar td und tc zuſammenfallen, und daher vereinigen ſich auch d und c in p.

§. 179.

Bei der Aufgabe, eine **Normale** einer Curve zu zeichnen, ſind in Beziehung auf das, was gegeben iſt, dieſelben drei Fälle zu unterſcheiden, wie vorhin bei den Tangenten.

Bei gegebenem Fußpuncte der Normalen zieht man durch dieſen eine Tangente und auf ſie eine Senkrechte. (Ergiebt ſich aber aus der Natur der Curve ein einfaches Verfahren, die Normale unmittelbar zu ziehen, ſo kann man umgekehrt mit ihrer Hülfe die Tangente finden; ſo z. B. beim Kreiſe, wo jeder Halbmeſſer eine Normale iſt).

Iſt ein Punct N der Normalen gegeben, der nicht auf der Peripherie der Curve liegt, ſo beſchreibe man um ihn eine Anzahl von Kreiſen, halbire die Bögen derſelben, welche in die Curve fallen, und lege durch die Halbirungspuncte eine ſtetige Curve; in F, wo dieſe Curve die gegebene Curve trifft, liegt der Fußpunct der Normalen; denn F iſt offenbar der Berührungspunct der gegebenen Curve und eines um N

Digitized by Google

beſchriebenen Kreiſes; in F haben alſo der Kreis und die Curve Tangente und Normale gemeinſchaftlich; die Normale des Kreiſes iſt aber der Halbmeſſer NF. (Werden von einem um N beſchriebenen Kreiſe mehrere Bogen durch die gegebene Curve ausgeſchnitten, ſo giebt es von N aus mehrere Normalen).

Um zu einer Curve eine Normale parallel mit einer gegebenen Geraden zu ziehen, nimmt man eine Senkrechte S zu letzterer an und legt eine Tangente an die Curve parallel mit S; der Berührungspunct iſt der Fußpunct der Normalen (und es werden ſo viele Normalen möglich ſein, als Tangenten mit S parallel ſein können).

Aſymptoten.

§. 180.

Eine Gerade, welche gegen eine nichtgeſchloſſene Curve ſo liegt, daß letztere ſich ihr bei immer weiterer Fortſetzung immer mehr nähert, ohne ſie je wirklich zu erreichen, heißt eine Aſymptote der Curve und kann als eine Tangente derſelben mit unendlich entferntem Berührungspuncte betrachtet werden.

Nicht jede in's Unendliche laufende Curve läßt eine Aſymptote zu; dagegen kann es für eine und dieſelbe Curve mehrere Aſymptoten geben.

Beiſpiele.

1.) Man laſſe um einen feſten Punct A eine gerade Linie ſich drehen und trage auf jeder Lage derſelben von dem Puncte aus, wo ſie eine feſte Gerade MN ſchneidet, jenſeits dieſer letztern ein conſtantes Stück ($p'q' = p''q'' = \ldots$) ab. Der geometriſche Ort für den Endpunct (q) dieſes Stücks iſt eine ſtetige Curve, welche ſich der Geraden MN, als einer Aſymptote, zweimal (rechts und links) ohne Ende nähert. (Denn in dem rechtwinkeligen Dreieck pqr bleibt die Hypotenuſe conſtant, der Winkel an p aber nimmt fortwährend ab, mit ihm alſo auch die gegenüberſtehende Kathete qr, d. h. die Entfernung des Curvenpuncts q von MN). Fig. 78.

Fig. 79. 2.) Auf einer Geraden AB trage man eine Anzahl gleicher Theile 1.2, 2.3, 3.4, ... ab, und lege durch die Theilpuncte (1, 2, 3, ...) Senkrechte zu AB. Hierauf verbinde man einen in der erſten Senkrechten willkührlich gewählten Punct I mit 3, den Schnittpunct II der Verbindungslinie und der zweiten Senkrechten mit 4, den Schnittpunct III mit 5, IV mit 6, und ſo ohne Ende fort. Denkt man ſich nun die Puncte I, II, III, IV, ... (deren Abſtände von AB immer abnehmen, ohne daß einer derſelben je auf die Linie AB ſelbſt fallen kann) auf einer ſtetigen Curve liegend, ſo ſieht man, daß für dieſe Curve AB eine Aſymptote iſt.

Fig. 80. 3.) Zwiſchen den Schenkeln eines Winkels QOR wähle man einen Punct A, lege durch ihn eine Gerade, welche die Schenkel des Winkels in den Puncten Q, R trifft, und mache RB = QA. Wird die Gerade um A gedreht, ſo ändert ſich die Lage des Puncts B, und ſein geometriſcher Ort iſt eine Curve, für welche die beiden Linien OR, OQ Aſymptoten ſind.

Krümmungshalbmeſſer.

§. 181.

Die Krümmung einer Curve an irgend einer Stelle kann nach den Winkeln beurtheilt werden, unter denen benachbarte Elemente zuſammenſtoßen, d. h. nach den Winkeln zwiſchen je zwei Tangenten, deren Berührungspuncte ſich äußerſt nahe liegen; es iſt die Krümmung einer Curve um ſo ſtärker, je bedeutender die aufeinanderfolgenden Elemente (oder Tangenten) ihre Richtung ändern. Der ſpitze Winkel zweier aufeinanderfolgenden Tangenten heißt Contingenz- oder Krümmungswinkel. *)

Da die Krümmungswinkel immer äußerſt kleine Größen ſind, ſich alſo graphiſch niemals genau darſtellen laſſen, ſo greift man zu einem andern Mittel, um die Krümmung einer Curve in einem beſtimmten Puncte zu veranſchaulichen, und

*) Bei gewundenen Curven kommt außer dem Krümmungswinkel noch der Windungswinkel in Betracht, d. i. der Winkel zwiſchen zwei aufeinanderfolgenden Berührungsebenen.

Digitized by Google

dieſes beſteht in der Vergleichung kleiner Curvenbögen mit Kreisbögen.

Legt man in eine Curve MN von einem beliebigen Fig. 81.
Puncte A aus zwei Sehnen AX, AY, und errichtet auf ihnen aus ihren Mitten D, E Senkrechte, ſo iſt deren Durchſchnitt C der Mittelpunct eines Kreiſes, welcher die Curve MN in den drei Puncten X, A, Y (und vielleicht noch in andern Puncten) ſchneidet. Rückt der eine Schnittpunct X unendlich nahe an A, ſo wird AX zu einem Elemente ſowohl des Kreiſes als der Curve MN, oder es berührt der Kreis die Curve in A. Dabei kann aber der Kreis noch jeden beliebigen Halbmeſſer haben, da über die Lage des Punctes Y nichts beſtimmt iſt, oder es giebt unendlich viele Kreiſe, welche eine Curve in einem gegebenen Puncte A berühren. (Die Mittelpuncte aller ſolcher Kreiſe liegen in der Normalen des Punctes A). Unter dieſen Kreiſen legt ſich derjenige am innigſten an die Curve an, den man erhält, wenn auch der Punct Y unendlich nahe an A rückt, ſo daß zwei Elemente dem Kreiſe und der Curve gemeinſchaftlich entſprechen. Zwiſchen der Curve und dieſem Kreiſe, welcher durch die beiden unendlich kleinen Sehnen AX und AY vollkommen beſtimmt iſt, findet Berührung zweiter Ordnung oder Osculation ſtatt; der Kreis ſelbſt heißt Osculations- oder Krümmungskreis, ſein Halbmeſſer Krümmungshalbmeſſer und ſein Mittelpunct C Krümmungsmittelpunct für den Punct A der Curve, weil letztere in der nächſten Umgebung des Punctes A die nämliche Krümmung hat, wie dieſer Kreis.

Unter der Vorausſetzung, daß AX und AY unendlich klein, ſtellt XAY das Supplement des Contingenzwinkels XAZ für den Punct A vor. Da immer $\angle$ XAZ = $\angle$ DCE (wie groß oder wie klein auch AX, AY ſeien), ſo folgt: der Contingenzwinkel für einen Punct A einer Curve iſt gleich dem Winkel zwiſchen den Normalen der beiden Puncte, welche zu beiden Seiten von A ihm unendlich nahe liegen. Je kleiner der Contingenzwinkel, in um ſo größerer Entfernung von A fällt alſo der Krümmungsmittelpunct, oder es wächſt der Krüm-

Digitized by Google

mungshalbmeſſer wie die Krümmung der Curve abnimmt, und eine Curve hat in demjenigen Puncte ihre größte Krümmung, für welchen der Krümmungshalbmeſſer am kleinſten wird. *)

Fig. 82. Soll nun für einen beliebigen Punct A einer gegebenen Curve MN (Fig. 82) der Krümmungshalbmeſſer auf graphiſchem Wege gefunden werden, ſo ziehe man vorerſt die Normale AB (§. 179), lege dann in die Curve von A aus nach beiden Seiten hin eine Anzahl Sehnen AM′, AM″,...., AN′, AN″...., halbire jede dieſer Sehnen ſenkrecht, errichte aus dem Puncte, wo die Halbirungslinie die Normale AB ſchneidet, auf letzterer eine Senkrechte nach der Seite zu, auf welcher die betreffende Sehne liegt, und mache dieſe Senkrechte jener Sehne gleich. Durch gehörige Verbindung der Endpuncte ſämmtlicher Senkrechten erhält man eine ſtetige Curve, auf welcher der geſuchte Krümmungsmittelpunct liegen muß (wie man ſogleich einſieht, wenn

---

*) Was zur Erklärung des Krümmungskreiſes bisher geſagt wurde, gilt auch noch, wenn MN eine gewundene Curve iſt. Da der Mittelpunct C des durch X, A, Y gehenden Kreiſes jedenfalls in der Ebene dieſer drei Puncte liegen muß, dieſe Ebene aber bei unendlicher Abnahme der Sehnen AX und AY in die Berührungsebene des Puncts A übergeht, ſo liegt der Krümmungskreis für irgend einen Punct einer gewundenen Curve immer in der Berührungsebene dieſes Punctes, weshalb dieſe Ebene auch Krümmungs- oder Osculationsebene genannt wird.

Denkt man ſich die gewundene Curve MN auf die Berührungsebene des Punctes A projicirt, ſo gehören die beiden in A zuſammenhängenden Elemente der Curve zugleich ihrer Projection an. Daraus folgt, daß dieſe Projection und die wahre Curve im Puncte A einerlei Krümmung haben, und daß ſich alſo die Aufgabe: „den Krümmungshalbmeſſer für einen Punct einer gewundenen Curve zu finden,“ zurückführen läßt auf die Aufgabe: „den Krümmungshalbmeſſer für einen Punct einer ebenen Curve zu finden.“

man ſich AM′ und AN′ bis in's Unendliche abnehmend denkt); und da jener Punct auch in der Normale AB liegt, ſo fällt er in C, wo die Normale jene Hülfscurve ſchneidet. Der Krümmungshalbmeſſer iſt CA.

Die Kenntniß der Krümmungsmittelpuncte einer Curve kann dazu dienen, kleine Bogen derſelben mittels des Zirkels auszuziehen, was zwar auch nur annähernde Richtigkeit aber größere Schärfe und Sauberkeit gewährt.

Beſondere Puncte.

§. 182.

In der Regel liegt die Tangente einer Curve ſo, daß die dem Berührungspuncte benachbarten Bogenſtücke auf einerlei Seite derſelben fallen. Oefters aber läßt ſich auch auf einer Curve ein Punct von der Beſchaffenheit finden, daß, wenn man durch ihn eine Tangente zieht, der Curvenbogen rechts vom Berührungspuncte dieſſeits der Tangente fällt, der Bogen links aber jenſeits. Ein ſolcher Punct heißt ein Wendepunct der Curve, weil von ihm aus diejenige Seite der Curve, welche anfangs die concave war, zur converen wird. So iſt in Fig. 83 der Punct W ein Wendepunct.

Schneidet eine Gerade die in Fig. 83 dargeſtellte Curve in drei Puncten V_1, V, U_1, ſo kann man den einen Punct V_1 mit V zuſammenfallen machen, wenn man die V_1U_1 durch Drehung um V in die berührende Lage VU bringt; der dritte Schnittpunct U, welcher von dem Berührungspuncte V immer durch ein endliches Bogenſtück getrennt bleibt, muß jenſeits des Wendepuncts liegen, wenn V dieſſeits liegt; denn zwiſchen V und W krümmt ſich die Curve von der Tangente VU ab, und erſt über W hinaus wendet ſie ſich gegen die Tangente zurück. Eben ſo würde eine Tangente, deren Berührungspunct auf dem Curvenzweige WU_1 liegt, einen Schnittpunct auf dem andern Zweige WV, geben. Verlegt man nun den Berührungspunct V in den Wendepunct W, ſo muß auch der Schnittpunct U in W fallen; denn da W Fig. 83.

ſowohl dem Zweige WU_1 als dem Zweige WV_1 angehört, ſo muß (nach dem Vorigen) U ſowohl auf WV_1 als auf WU_1 liegen, was allein vom Puncte W gilt. Demnach ſtellt der Wendepunct, als Berührungspunct einer Tangente betrachtet, die Vereinigung von drei Schnittpuncten vor, und die Tangente ſelbſt hat mit der Curve zwei Elemente gemein; ſie vertritt alſo hier den Krümmungskreis. Da nun eine gerade Linie die Grenze für einen Kreisbogen iſt, deſſen Halbmeſſer ohne Aufhören zunimmt, ſo ſagt man, der Krümmungshalbmeſſer für den Wendepunct einer Curve ſei unendlich groß. Dieß zeigt ſich auch dadurch, daß die beiden in der nächſten Nähe vom Wendepuncte errichteten Normalen, welche durch ihren Schnitt den Krümmungsmittelpunct geben ſollen, parallel laufen (ſich erſt in unendlicher Entfernung ſchneiden), indem, wie vorhin bemerkt, die beiden im Wendepuncte zuſammenhängenden Elemente, auf denen jene Normalen ſenkrecht ſind, in die Tangente des Wendepuncts fallen oder der Contingenzwinkel im Wendepuncte Null iſt.

Auf einer Curve, welche von einer Geraden im Allgemeinen in nicht mehr als zwei Puncten geſchnitten werden kann, iſt kein Wendepunct möglich, weil ein ſolcher das Zuſammenfallen dreier Schnittpuncte vorausſetzt.

§. 183.

Eine Curve kann von einem Puncte aus die Richtung ihres Zuges plötzlich in die entgegengeſetzte verwandeln, und ein ſolcher Punct heißt dann ein Rückkehrpunct. Denkt
Fig. 84, man ſich z. B. eine Curve ARB von einem bewegten Puncte be-
I, II. ſchrieben, welcher jeden Augenblick die Richtung ſeiner Bewegung um einen ſehr kleinen Winkel geſetzmäßig ändert, und läßt dieſen Winkel für den Punct R Null ſein, während zugleich der beſchreibende Punct rückläufig wird, ſo iſt R ein Rückkehrpunct; (ein Wendepunct wäre R geworden, wenn der beſchreibende Punct ſeine Bewegung in dem urſprünglichen Sinne vorwärts fortgeſetzt hätte). Unter obigen Vorausſetzungen muß der beſchreibende Punct nach Ueberſchreitung

Digitized by Google

des Punctes R daſſelbe Element noch einmal durchlaufen, welches er unmittelbar vor Erreichung dieſes Punctes zurückgelegt hat; in dieſem Doppelelemente *berühren* ſich alſo die zwei Zweige AR, BR der Curve, oder die Verlängerung des genannten Elements iſt eine gemeinſchaftliche Tangente beider Zweige. Liegen dieſe Zweige auf verſchiedenen Seiten dieſer Tangente (wie in Fig. 84, I), ſo ſagt man, die Curve bilde im Rückkehrpuncte eine *Spitze*; liegen die Zweige auf einerlei Seite der Tangente (wie in Fig. 84, II), ſo hat die Curve dort einen *Schnabel*.

Der Krümmungskreis für den Rückkehrpunct einer Curve reducirt ſich auf einen Punct, oder der Krümmungshalbmeſſer iſt Null; denn da die zwei dem Rückkehrpuncte zunächſt benachbarten Curvenelemente ſich decken, ſo müßten auch zwei aufeinander folgende Elemente des Krümmungskreiſes in einanderfallen, was nicht möglich iſt, ſo lange der Halbmeſſer eine noch irgend meßbare Länge hat.

§. 184.

Ein Punct, durch welchen eine Curve öfter als einmal geht, heißt ein *mehrfacher Punct* derſelben. So iſt p ein Doppelpunct der Curve A; q ein dreifacher Punct der Curve B. Fig. 85, I–IV.

In einem $n$fachen Puncte ſind n Tangenten möglich, wenn die Bögen der Curve ſich in demſelben durchſchneiden (Fig. II); aber nur *eine* Tangente, wenn ſich die Bögen ſämmtlich berühren (Fig. III); in Fig. IV läßt der dreifache Punct r *zwei* Tangenten zu, weil in ihm zwei Bögen ſich berühren, während ſie vom dritten geſchnitten werden. Ferner giebt es für einen $n$fachen Punct n Krümmungshalbmeſſer, welche jedoch in beſondern Fällen zum Theil oder auch alle unter ſich gleich ſein können.

Rectification.

§. 185.

Um eine Curve zu *rectificiren*, d. h. ihre Länge in gerader Linie anzugeben, müßte man ihre einzelnen Ele-

Digitized by Google

mente, welche urſprünglich unter unendlich kleinen Contingenzwinkeln zuſammenſtoßen, alle in einerlei Richtung aneinanderfügen. Da aber die Elemente ſelbſt unendlich kleine Größen ſind, ihre Anzahl dagegen unendlich groß iſt, ſo kann man dieſe Aufgabe graphiſch nie ganz genau löſen, ſondern muß ſich mit einem annähernden Reſultate begnügen. Ein ſolches erhält man, wenn man auf der Curve Bogenſtücke von ſo geringer Länge abnimmt, daß ihre Abweichung von den zugehörigen Sehnen nicht mehr auffällt, und dann dieſe kleinen Sehnen mittels des Zirkels auf eine Gerade aufträgt (wobei natürlich vorausgeſetzt werden muß, daß die Curve ſelbſt möglichſt richtig und ſcharf gezeichnet iſt).

Läßt ſich die Curve in mehrere congruente Stücke zerlegen, ſo braucht man nur eines dieſer Stücke auf die angegebene Weiſe zu rectificiren. In dieſer Art könnte man z. B. beim Kreiſe verfahren; beſſer aber thut man hier, eine Linie zu ſuchen, welche ſich zum Durchmeſſer verhält wie 22 : 7; denn obgleich der Bruch $\frac{22}{7} = 3,142 \ldots$ nur in den zwei erſten Decimalſtellen mit der Ludolph'ſchen Zahl übereinſtimmt, ſo würde man doch bei der Rectification mittels kleiner Bögen der wahren Länge der Peripherie nicht näher kommen.

Soll auf der Curve A ein Bogen gefunden werden ſo groß als ein gegebener Bogen der Curve B, ſo nimmt man wieder auf letzterer ſehr kleine Bogenſtücke in den Zirkel und reiht ſie auf der Curve A aneinander. Wie klein ein ſolches Bogenſtück werden müſſe, hängt von derjenigen Curve ab, welche die größere Krümmung hat.

Evolution.

§. 186.

Denkt man ſich um eine Curve einen vollkommen biegſamen und unausdehnbaren Faden gelegt und dieſen ſo abgewunden, daß das von der Curve abgelöſte Stück immer ſtraff geſpannt bleibt, ſo beſchreibt der Anfangspunct des Fadens eine neue Curve, welche eine Evolvente der erſten

genannt wird, während die urſprüngliche Curve ſelbſt die **Evolute** heißt, und man ſagt, die Evolvente ſei durch **Abwickelung** (Evolution) der gegebenen Curve entſtanden.

Das abgewickelte Fadenſtück bleibt bei ſeiner geradlinigen Anſpannung fortwährend **Tangente** der Evolute; daher kann man die Evolvente auch entſtehen laſſen durch einen Punct einer Tangente, welche, ohne zu gleiten, ſich auf der Evolute fortwälzt. *)

Iſt P irgend eine Lage des beſchreibenden Punctes, T der Berührungspunct der Tangente für dieſe Lage, 𝔓 der Punct auf der Evolute, mit welchem P früher zuſammengefallen war, ſo iſt, wie aus den obigen Erklärungen folgt, das Stück PT der Tangente eben ſo lang wie der Bogen 𝔓T der Evolute. Um daher eine Evolvente einer gegebenen Curve zu conſtruiren, wenn 𝔓 der Urſprung der Abwickelung iſt, ziehe man durch mehrere, nicht allzuweit auseinanderliegende Puncte Tangenten T_2P_2, T_3P_3, T_4P_4, ... an die Curve, trage auf dieſen der Reihe nach die rectificirten Bögen $T_2𝔓$, $T_3𝔓$, $T_4𝔓$, ... ab, und verbinde die Puncte 𝔓, P_2, P_3, P_4, ... durch eine ſtetige Curve. In Fig. 86 iſt als Evolute ein Kreis gewählt, und in dieſem Falle iſt es am vortheilhafteſten, die Bögen $𝔓T_2$, T_2T_3, T_3T_4, ... von gleicher Länge zu nehmen, weil man dann nur einen einzigen zu rectificiren braucht. Fig. 86.

Da der Kreis in allen Puncten dieſelbe Geſtalt hat (oder in ſich ſelbſt gedreht werden kann), ſo iſt es hier gleichgiltig, in welchem Puncte man die Abwickelung anfangen läßt; es ſind nämlich alle Evolventen, welche verſchiedenen Anfangspuncten entſprechen, unter ſich congruent. Im Allgemeinen iſt dieß aber keineswegs der Fall, ſondern es ändert ſich die Geſtalt der Evolvente, ſo wie man einen andern Punct der Evolute als Anfang der Abwickelung nimmt,

*) Dieſe Erklärung der Evolvente paßt auch für eine **gewundene** Evolute, und man ſieht leicht, daß in einem ſolchen Falle die Evolvente ſelbſt eine gewundene Curve werden müßte.

Digitized by Google

und es kann alſo eine und dieſelbe Curve unendlich viele Evolventen haben.

Iſt aber auch der Anfangspunct P der Abwickelung auf der Evolute beſtimmt, ſo könnte es immer noch ſcheinen, als gebe es für dieſen Punct zwei Evolventen, da man die Abwickelung ſowohl nach der rechten als nach der linken Seite hin vornehmen kann. Behält man jedoch die zuletzt erwähnte Beſchreibungsart der Evolvente (mittels einer wälzenden Tangente) im Auge, ſo zeigt ſich, daß dieſe beiden Curven als zwei Zweige einer einzigen Curve zu betrachten ſind. Denn verfolgt man in Fig. 86 die Bewegung der Tangente rückwärts vom Puncte T_4 durch die Puncte T_3, T_2 nach dem Puncte T_1, ſo iſt kein Grund vorhanden, dieſe Bewegung hier zu unterbrechen; bei Fortſchreitung derſelben aber kommt offenbar der beſchreibende Punct (welcher früher die Lagen P_4, P_3, P_2, P durchlaufen hat) in die Lagen P^2, P^3,.... d. h. er erzeugt einen zweiten Zweig der Evolvente. Im vorliegenden Beiſpiele (nämlich für die Evolvente des Kreiſes) iſt dieſer Zweig dem erſten congruent; im Allgemeinen aber nicht.

Nimmt man für einen Augenblick an, die Stücke T_1T_2, T_2T_3,.... der Evolute ſeien gerade Linien, d. h. ſubſtituirt man für die abzuwickelnde Curve (die nicht gerade ein Kreis ſein ſoll) ein Polygon, und läßt ſtatt der Tangente T_2P_2 die Verlängerung von T_3T_2, ſtatt der Tangente T_3P_3 die Verlängerung von T_4T_3,.... eintreten, ſo erſcheint die Evolvente aus Kreisbögen PP_2, P_2P_3, P_3P_4,.... zuſammengeſetzt, denen der Reihe nach die Halbmeſſer $T_2P_2 = T_1T_2$, $T_3P_3 = T_3T_2 + T_2P_2$, ..., und die Mittelpuncte T_2, T_3, ... zukommen; die Linien T_2P_2, T_3P_3,.... ſind alſo Normalen der Evolvente. Dieß bleibt wahr, wenn man das als Evolute feſtgeſetzte Polygon durch Verkleinerung und Vervielfältigung ſeiner Seiten nach und nach in eine ſtetige Curve übergehen läßt, ſo daß aus den Seiten Elemente und aus deren Verlängerungen Tan-

Digitized by Google

genten werden *). Demnach iſt jede Tangente einer Evolute eine Normale der Evolvente, und der Berührungspunct dieſer Tangente iſt der Krümmungsmittelpunct für den entſprechenden Punct der Evolvente. Umgekehrt iſt jede Normale der Evolvente eine Tangente der Evolute, und die Evolute ſelbſt iſt der geometriſche Ort für die Krümmungsmittelpuncte der Evolvente. Wenn daher zu irgend einer Curve, als Evolvente betrachtet, die Evolute verlangt wird, ſo hat man aus möglichſt vielen Puncten der Curve Normalen zu errichten und eine Curve zu zeichnen, welche alle dieſe Normalen berührt. Für jede ebene Curve findet man nur eine Evolute.

Im Puncte P, wo die Evolvente auf die Evolute ſtößt, iſt für beide Zweige der erſtern nur eine Normale möglich (nämlich die Evolutentangente T_1X), daher auch nur eine Tangente, oder der Punct P iſt ein Rückkehrpunct der Evolvente (vgl. §. 183), und die beiden Zweige derſelben treffen in dieſem Rückkehrpuncte die Evolute ſenkrecht.

Umhüllung.

§. 187.

Bewegt ſich in der Ebene irgend eine krumme oder gerade Linie ſtetig nach einem vorgeſchriebenen Geſetze, ſo kann man eine ſtetige Linie zeichnen, welche jene in allen ihren möglichen Lagen berührt. Dieſe Linie heißt die Umhüllungslinie der beweglichen, und letztere ſelbſt die Umhüllte. Dabei kann auch die Umhüllte während ihrer Bewegung ihre Dimenſionen nach einem gegebenen Geſetze ändern, wenn nur ihre Art dieſelbe bleibt.

Wenn man ſich drei unmittelbar aufeinanderfolgende Lagen der Umhüllten vorſtellt (zwiſchen denen alſo die Fortſchreitungen, bei der vorausgeſetzten Stetigkeit der Be-

*) Dieſe Bemerkung zeigt, wie man die Evolvente ganz mittels des Zirkels ausziehen kann, wenn man die Bögen T_1T_2, T_2T_3,... klein genug nimmmt.

wegung, unendlich klein ſind), ſo iſt das Stückchen der mittlern Lage, welches durch die erſte und dritte Lage begrenzt wird, ein Element derſelben, und gehört als ſolches zugleich der berührenden Umhüllungslinie an; die einander unendlich nahen Endpuncte dieſes Elements (d. i. die Puncte, in denen die mittlere Lage von der erſten und dritten geſchnitten wird) liegen alſo auf der Umhüllungslinie, und daher kann man ſich dieſe auch gebildet denken durch die ſucceſſiven Durchſchnitte, welche zwiſchen den einzelnen Lagen der Umhüllten in deren ſtetiger Aufeinanderfolge ſich ergeben.

Beiſpiele.

Bei zwei concentriſchen Kreiſen ſchneiden bekanntlich alle Tangenten des innern gleiche Bögen vom äußern ab. Daher iſt der innere Kreis die Umhüllungscurve einer Sehne des äußern, welche ſich in dieſem herumbewegt ohne ihre Länge zu ändern. (Iſt dieſe Sehne der Durchmeſſer, ſo reducirt ſich die Umhüllungscurve auf einen Punct).

Die Umhüllungscurve einer Geraden, welche auf einer ebenen Curve ſtets normal bleibt, iſt die Evolute dieſer Curve (vgl. §. 186).

Ein Kreis von conſtantem Halbmeſſer, deſſen Mittelpunct auf einer Geraden fortrückt, wird durch zwei parallele Gerade umhüllt.

Ändert ſich bei dieſem Fortrücken der Halbmeſſer des Kreiſes im Verhältniß mit dem Stücke, welches der Mittelpunct durchlaufen hat, ſo gehen jene Parallelen in zwei Gerade über, welche ſich auf der Bahn des Mittelpuncts ſchneiden.

Als Umhüllungscurven eines Kreiſes, deſſen Mittelpunct bei conſtantem Halbmeſſer auf der Peripherie eines andern Kreiſes ſich bewegt, erſcheinen zwei concentriſche Kreiſe (deren einer ſich zu einem Puncte zuſammenzieht, wenn der bewegliche Kreis dem feſten gleich iſt).

[Um ſich im Zeichnen von Umhüllungscurven zu üben, kann man folgende Aufgaben behandeln: 1.) Der Scheitel eines rechten Winkels rückt auf einer gegebenen Geraden fort, während der eine Schenkel beſtändig durch einen gegebenen Punct geht; welche Geſtalt hat die Umhüllungscurve des andern Schenkels? — 2.) Statt der feſten Geraden ſetze man einen Kreis und nehme den gegebenen

Punct innerhalb deſſelben. — 3.) Wie vorhin; aber der gegebene Punct liege außerhalb des Kreiſes. — 4.) Eine Gerade bewegt ſich ſo, daß die Stucke, welche ſie von den Schenkeln eines gegebenen Winkels abſchneidet, eine gegebene Summe haben *); welche Curve umhüllt ſie? — 5.) Von einem Dreieck ſind die Richtungen zweier Seiten und der Flächeninhalt gegeben; man ſoll die Umhüllungscurve für alle möglichen Lagen der dritten Seite finden. — 6.) Ein Kreis von veränderlichem Halbmeſſer geht ſtets durch einen gegebenen Punct, während ſein Mittelpunct auf einem andern Kreiſe bleibt; man zeichne ſeine Umhüllungscurve.]

Linien zweiter Ordnung.

§. 188.

Unter den ebenen Curven zeichnen ſich durch ihre vielen merkwürdigen Eigenſchaften diejenigen beſonders aus, welche (aus ſpater anzuführenden Gründen) **Linien der zweiten Ordnung** genannt werden. Es ſind deren **drei**, und man unterſcheidet ſie durch die Namen **Parabel**, **Ellipſe**, **Hyperbel**.

§. 189.

Eine **Parabel** iſt der geometriſche Ort eines Punctes, welcher von einem gegebenen Puncte F und einer gegebenen Geraden AB einerlei Entfernung hat. Jener Punct F heißt ihr **Brennpunct**, und jede Gerade, welche ihn mit einem Puncte der Peripherie verbindet, ein **Brennſtrahl** (radius vector). Fällt man $FD \perp AB$ und macht $DS = SF$, ſo iſt S ein Punct der Parabel und heißt ihr **Scheitel**; die verlängerte SF iſt ihre **Axe**. Fig. 87.

---

*) Iſt das auf dem einen Schenkel abgeſchnittene Stück Null geworden, ſo kann man, um die Bewegung der Geraden ſtetig fortzuſetzen, auf die **Verlängerung** dieſes Schenkels übergehen; die hier abgeſchnittenen Stücke müſſen aber dann (weil man ſie in entgegengeſetzter Richtung zählt) als **negativ** aufgefaßt werden, ſo daß die gegebene Länge nicht mehr als Summe, ſondern als **Differenz** der Abſchnitte erſcheint.

Die Parabel ſelbſt iſt nun leicht zu conſtruiren. Denn legt man durch einen beliebigen Punct p der Axe eine Senkrechte PpP zu ihr und durchſchneidet dieſe Senkrechte von F aus mit der Entfernung Dp, ſo ſind die Schnittpuncte P und P zwei Puncte der Parabel, und auf die nämliche Art kann man beliebig viele Paare von Puncten finden. Ueber S hinaus nach der Seite von D zu kann es keine Parabelpuncte mehr geben; denn fiele p auf dieſe Seite, ſo wäre $Dp < Fp$, alſo würde der um F mit Dp beſchriebene Kreis die PpP nicht mehr erreichen. Auf der Seite von S gegen F aber kann man den Punct p ſo weit hinaus verlegen, als man will, und man wird immer noch Puncte erhalten; die Parabel zeigt alſo auf dieſer Seite zwei ins Unendliche laufende Zweige.

Da immer (wo auch p liegen möge) $pP = pP$ iſt, ſo ſind die beiden Parabelzweige dieſſeits und jenſeits der Axe **congruent**.

Jeder Punct **außerhalb** (auf der converen Seite) der Parabel liegt näher an AB als an F; ein Punct **innerhalb** (auf der concaven Seite) der Parabel iſt von AB weiter entfernt als von F. Beide Sätze ſind leicht zu beweiſen und gelten auch umgekehrt.

Zieht man von einem Puncte P der Parabel den Brennſtrahl PF und eine Senkrechte PA auf AB, ſo iſt die Halbirungslinie PM des Winkels FPA eine **Tangente** der Parabel; denn mit Ausnahme des Punctes P müſſen alle ihre Puncte außerhalb der Parabel liegen. Betrachtet man z. B. den Punct L, zieht LF, LA, und fällt $LK \perp AB$, ſo iſt $LA = LF$, $LK < LA$, alſo auch $LK < LF$, d. h. der Punct L liegt auf der converen Seite der Parabel. — Die **Normale** im Puncte P halbirt den Nebenwinkel von FPA.

Soll von einem außerhalb der Parabel gegebenen Puncte L eine Tangente an ſie gezogen werden, ſo ziehe man LF, beſchreibe um L den Kreisbogen FA, welcher die AB in A trifft, halbire den Winkel FLA durch die Gerade LP und mache $AP \perp AB$; dann iſt LP die Tangente und P ihr Berührungspunct (denn LP halbirt den Winkel FPA).

Digitized by Google

Bei weiterer Betrachtung der Parabel findet man leicht noch andere Methoden, Tangenten zu ziehen. Zunächſt fällt in die Augen, daß FQ = FP (denn die eine Hälfte des Winkels APF iſt der Wechſelwinkel von $\angle$ PQF), und hierin liegt ein ſehr einfaches Mittel, die Tangente PQ bei gegebenem Berührungspuncte zu finden. Ferner ſieht man, daß die Linien AF und PQ ſich *gegenſeitig* ſenkrecht halbiren, und zwar muß ihr Schnittpunct M auf die durch den Scheitel S gehende Tangente zu liegen kommen; denn dieſe letztere Tangente iſt (als Halbirungslinie des flachen Winkels DSF) ſenkrecht auf DF, alſo parallel mit AD, und geht (wegen DS = SF) durch den Mittelpunct M von AF. Sonach iſt SM $\parallel$ Pp und alſo (wegen QM = MP) QS = Sp, worin abermals ein Mittel gegeben iſt, die Tangente in P zu conſtruiren (und zwar ohne Benützung des Brennpuncts). — Iſt PN die Normale in P, ſo iſt FN = FQ = FP (oder die Puncte Q, P, N liegen um F im Kreiſe). Hiernach kann man die Normale unabhängig von der Tangente zeichnen; dasſelbe iſt aber auch durch den Satz ermöglicht, daß pN = 2SF = DF, und die Wahrheit dieſes Satzes folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke SMF, pPN und dem Umſtande, daß Pp = 2.SM. — Um an die Parabel eine Tangente parallel mit einer gegebenen Geraden VW zu legen, fälle man FMA $\perp$ VW, mache MP $\perp$ FM, AP $\perp$ AB; dann iſt MP die Tangente und P der Berührungspunct, wie aus dem Vorhergehenden leicht zu beweiſen. *)

§. 190.

Eine *Ellipſe* iſt der geometriſche Ort eines Punctes, Fig. 88.
deſſen Entfernungen von zwei gegebenen Puncten F_1, F_2 eine gegebene Summe σ haben. Dieſe beiden Puncte heißen die *Brennpuncte* der Ellipſe; jede Gerade von einem Brennpuncte nach einem Peripheriepuncte iſt ein *Brennſtrahl*.

Trägt man vom Halbirungspuncte O der Linie F_1F_2 aus auf der Richtung derſelben nach beiden Seiten die Stücke

*) Da bei jeder Richtung von PQ der Winkel FMP = 90° iſt, ſo ſieht man, daß die Umhüllungscurve in §. 187. Aufg. 1. eine *Parabel* ſein muß. — (Auch Aufg. 4 desſelben § führt auf eine Parabel).

$OS_1 = OS_2 = \frac{1}{2}\sigma$ ab, ſo liegen die Puncte S_1, S_2 auf der Ellipſe (denn $S_1F_1 + S_1F_2 = S_2F_1 + S_1F_2 = 2 \cdot OS_1 = \sigma$). Zwei andere Puncte T_1, T_2 der Ellipſe erhält man auf der Linie T_1OT_2 (welche die S_1S_2 ſenkrecht halbirt), wenn man ſie von einem Brennpuncte aus mit OS_1 durchſchneidet. Die Puncte S_1, S_2, T_1, T_2 heißen die Scheitel, und die Linien S_1S_2, T_1T_2 die Axen der Ellipſe; die durch die Brennpuncte gehende Axe S_1S_2 iſt die größere von beiden, da ihre Hälfte T_2F_1 ($= OS_1$) Hypotenuſe eines rechtwinkeligen Dreiecks iſt, in welchem die Hälfte OT_2 der andern eine Kathete abgiebt. — Wählt man auf der großen Axe einen Punct G und beſchreibt mit GS_1 einen Kreis um F_1, mit GS_2 einen Kreis um F_2, ſo gehören die Schnittpuncte P, 𝔓 beider Kreiſe der Ellipſe an, und in dieſer Weiſe kann man unendlich viele Paare von Ellipſenpuncten finden; doch ſieht man leicht, daß G immer zwiſchen F_1 und F_2 genommen werden muß, wenn ſich jene Kreiſe ſchneiden ſollen, und hieraus folgt zugleich, daß die Ellipſe keinen unendlichen Zweig haben kann, ſondern eine geſchloſſene Curve iſt. Da die Verbindungslinie P𝔓 jedesmal von S_1S_2 ſenkrecht halbirt wird, ſo theilt die große Axe die Ellipſe in zwei congruente Hälften. Aber auch die kleine Axe T_1T_2 trennt die Ellipſe in congruente Hälften; denn hätte man vorhin den Kreis vom Halbmeſſer S_1G um F_2, den andern um F_1 beſchrieben, ſo wäre ſtatt des Dreiecks F_1PF_2 das ihm congruente $F_1P_0F_2$ entſtanden, deſſen Spitze P_0 ebenfalls auf der Ellipſe liegt, und aus der Lage beider Dreiecke folgt, daß die Verbindungslinie PP_0 durch T_1T_2 ſenkrecht halbirt wird. Demnach zerfällt die Ellipſe durch die Verbindung beider Axen in vier congruente Quadranten. Der Durchſchnitt O beider Axen heißt der Mittelpunct der Ellipſe.

Die Ellipſe läßt ſich auf mechaniſche Weiſe conſtruiren mittels eines Fadens von der Länge der großen Axe, deſſen beide Enden in den Brennpuncten befeſtigt ſind; wird nämlich ein Stift ſo geführt, daß er den Faden ſtets in der Ebene des Zeichnungsblattes ausgeſpannt hält, ſo beſchreibt dieſer Stift die Ellipſe. Denkt man ſich dabei die beiden

Brennpuncte einander ſo ſehr genähert, daß ſie in einen einzigen Punct zuſammenfallen, ſo wird der den Faden ſpannende Stift ſtets von dieſem Puncte um die halbe Länge des Fadens entfernt ſein, alſo einen *Kreis* um ihn beſchreiben. Man ſieht hieraus, daß der Kreis als ein beſonderer Fall der Ellipſe anzuſehen iſt.

Ein Punct muß außerhalb der Ellipſe liegen, wenn die Summe ſeiner Entfernungen von den Brennpuncten $> S_1S_2$ iſt; innerhalb aber, wenn dieſe Summe $< S_1S_2$ iſt.

Wird durch einen Punct P auf der Ellipſe eine Gerade PL ſo gelegt, daß ſie den Nebenwinkel F_1PK der von P ausgehenden Brennſtrahlen halbirt, ſo *berührt* ſie die Ellipſe in P, indem alle ihre andern Puncte außerhalb der Ellipſe liegen. Fiele z. B. der Punct L noch auf die Ellipſe, ſo müßte $F_1L + F_2L = S_1S_2$ ſein; macht man aber $PK = PF_1$, ſo iſt

$$F_2K = S_1S_2$$
$$LK = LF_1$$
$$F_2L + LK > F_2K,$$

alſo auch $F_2L + LF_1 > S_1S_2$,

d. h. der Punct L liegt *außerhalb* der Ellipſe.

Um von einem außerhalb gegebenen Puncte L eine Tangente an die Ellipſe zu ziehen, verbinde man L mit einem Brennpuncte F_1, beſchreibe um L mit LF_1 einen Kreisbogen, durchſchneide ihn vom andern Brennpuncte F_2 aus mit der großen Axe S_1S_2 in K, und halbire den Winkel F_1LK; dann iſt die Halbirungslinie LP eine Tangente und der Schnitt P der LP mit KF_2 ihr Berührungspunct; denn ſie halbirt, wie leicht zu zeigen, auch den Winkel F_1PK. *) Hätte man den Kreisbogen mit LF_2 beſchrieben und von F_1

*) Man ſieht, daß man zur Löſung dieſer Aufgabe die *Peripherie* der Ellipſe gar nicht zu haben braucht, wenn nur die große Axe und die Brennpuncte gegeben ſind.

Eben ſo iſt bei der entſprechenden Aufgabe in §. 189 die Peripherie der Parabel entbehrlich; man hat nur den Brennpunct F und die Gerade AB nöthig.

Digitized by Google

aus mit S_1S_2 durchſchnitten, ſo würde man eine zweite Tangente von L aus erhalten haben. (Auf dieſe zweite Tangente kommt man auch, wenn man ſtatt des Schnittpuncts K der um L und F_2 beſchriebenen Kreiſe den zweiten Schnittpunct derſelben nimmt).

Die Normale der Ellipſe im Puncte P halbirt den Winkel F_1PF_2 der zu P gehörigen Brennſtrahlen. Dieſer Winkel iſt Null, wenn P in S_1 oder S_2 fällt; und er wird von T_1T_2 halbirt, wenn P in T_1 oder T_2 fällt; daher ſind beide Axen normal auf der Ellipſe. *)

§. 191.

Fig. 89. Eine Hyperbel iſt der geometriſche Ort eines Punctes, deſſen Entfernungen von zwei gegebenen Puncten F_1, F_2 eine gegebene Differenz δ haben. Auch hier heißen dieſe Puncte die Brennpuncte und jene Entfernungen Brennſtrahlen. Trägt man auf der Linie F_1F_2 von ihrem Halbirungspuncte O aus die Größe $\frac{1}{2}\delta$ nach beiden Seiten ab, ſo erhält man die beiden Scheitel S_1, S_2 der Hyperbel; die (begrenzte) Linie S_1S_2 heißt die reelle Axe, die in O auf ihr ſenkrechte (unbegrenzte) T_1T_2 die imaginäre Axe, der Punct O der Mittelpunct der Hyperbel. Nimmt man auf der Richtung der reellen Axe einen Punct G und beſchreibt mit den Halbmeſſern GS_1, GS_2 Kreiſe um die beiden Brennpuncte, ſo liegen die Schnittpuncte P, $\mathfrak{P}$ der Kreiſe auf der Hyperbel. Zwiſchen F_1 und F_2 kann G nicht fallen, weil ſich ſonſt die Kreiſe nicht erreichen; über dieſe Puncte hinaus aber kann man G in jede noch ſo große Entfernung rücken; die Hyperbel kann alſo keine geſchloſſene Curve ſein; vielmehr beſteht ſie aus zwei getrennten Äſten, deren jeder wieder zwei unendliche Zweige hat. Die beiden Axen ſcheiden die Hyperbel in vier congruente Quadranten, was gerade ſo bewieſen wird wie bei der Ellipſe.

*) Die Umhüllungscurve in §. 187, Aufg. 2, iſt eine Ellipſe und der gegebene Punct einer ihrer Brennpuncte.

Digitized by Google

Legt man durch einen Brennpunct F_2 und irgend einen Punct L_0 eine Gerade, und bezeichnet durch P_0 den Punct, in welchem dieſe Gerade die Hyperbel ſchneidet, ſo liegt der Punct L_0 auf der *convexen* Seite der Hyperbel, wenn P_0 *zwiſchen* L_0 und F_2 fällt; auf der *concaven* aber, wenn P_0 auf die *Verlängerung* von F_2L_0 fällt. Für den erſten Fall iſt im Dreieck $F_1L_0P_0$

$$L_0F_1 - L_0P_0 < F_1P_0,$$

daher, wenn man auf beiden Seiten P_0F_2 abzieht:

$$L_0F_1 - L_0P_0 - P_0F_2 < F_1P_0 - P_0F_2,$$

d. i. $$L_0F_1 - L_0F_2 < S_1S_2$$

oder die Differenz der Entfernungen eines Punctes von den Brennpuncten iſt kleiner als die reelle Axe, wenn dieſer Punct auf der convexen Seite der Hyperbel liegt. Aehnlich beweiſt man, daß jene Differenz größer als die reelle Axe iſt, wenn der Punct auf der concaven Seite liegt, und beide Sätze gelten auch umgekehrt.

Halbirt LP den Winkel F_1PF_2 zweier von einem Hyperbelpuncte P auslaufenden Brennſtrahlen, ſo *berührt* ſie die Hyperbel in P. Jeder andere Punct außer P muß nämlich auf der convexen Seite der Hyperbel liegen; denn macht man $PK = PF_1$, ſo iſt auch

$$LK = LF_1$$

und $$F_2K = S_1S_2;$$

nun iſt aber $$LF_2 - LK < F_2K,$$

alſo auch $$LF_2 - LF_1 < S_1S_2,$$

oder L liegt auf der convexen Seite.

Was bei der Ellipſe über die Aufgabe: aus einem außerhalb gegebenen Puncte eine Tangente zu ziehen, geſagt iſt, läßt ſich unverändert auf die Hyperbel übertragen, wenn man ſtatt der Fig. 88 die Fig. 89 vor Augen hat.

Die *Normale* im Puncte P der Hyperbel halbirt den Nebenwinkel der ihm entſprechenden Brennſtrahlen. Die Normale der beiden Scheitel iſt die reelle Axe. *)

*) Die Aufgaben 3 und 5 des §. 187 führen auf Hyperbeln, und im erſtern Falle iſt der gegebene Punct ein Brenn-

Digitized by Google

§. 192.

Durch die Lage des Puncts p iſt in Fig. 87, 88 und 89 auch die Lage des Puncts P oder 𝔓 beſtimmt und alſo auch der Abſtand Pp eines ſolchen Punctes von der Axe. Dieſer Abſtand heiße die **Ordinate** des Punctes P. Die Lage des Puncts p ſelbſt kann dadurch beſtimmt werden, daß man ſeine Entfernung von einem beſtimmten Puncte der Axe angiebt, und für dieſen nimmt man am beſten in Fig. 87 den Scheitel S, in Fig. 88 und 89 den Schnittpunct O beider Axen. Die Entfernung Sp (Fig. 87) oder Op (Fig. 88, 89) heißt die **Abſciſſe** des Puncts P. In den letztern Fällen müßte man noch angeben, auf welcher Seite von O man dieſe Entfernung abnimmt; doch folgt aus der Congruenz der rechts und links von T_1T_2 liegenden Curvenhälften, daß gleichen Abſciſſen zu beiden Seiten gleiche Ordinaten zukommen. Jeder beſtimmten Abſciſſe Sp oder Op entſprechen zwei gleiche aber entgegengeſetzt gerichtete Ordinaten Pp und 𝔓p. Iſt nun der Werth einer Abſciſſe in **Zahlen** gegeben, ſo muß der Werth der zugehörigen Ordinate auch durch **Rechnung** gefunden werden können, oder es muß ſich die zwiſchen der Abſciſſe und Ordinate jedes Curvenpunctes P ſtattfindende Beziehung durch eine **Gleichung** ausdrücken laſſen. In einer ſolchen Gleichung wird immer die Abſciſſe durch x und die zugehörige Ordinate durch y bezeichnet.

Fig. 87. I.) Um dieſe Gleichung für die **Parabel** abzuleiten, bemerke man, daß FP = AP = Dp, oder, wenn man SF (= SD) durch f bezeichnet und die eben erwähnte Bezeichnung der Abſciſſe und Ordinate einführt:

$$\sqrt{y^2 + (x - f)^2} = x + f.$$

Die Entwickelung giebt

$$y^2 = 4fx$$

oder, wenn man 4f = c ſetzt:

$$y^2 = cx \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

$$y = \pm\sqrt{cx}$$

---

punct. Auch die Curve in §. 180, Beiſp. 3, iſt eine Hyperbel.

Die Sehne der Parabel, welche durch den Brennpunct geht und auf der Axe ſenkrecht ſteht (oder die doppelte Ordinate eines Punctes, deſſen Abſciſſe SF iſt), heißt der Parameter der Parabel und hat die Länge $c = 2 \cdot DF$; denn für $x = f = \frac{c}{4}$ wird $y = \frac{c}{2}$, alſo $2y = c$.

Aus der Gleichung (A) folgt, daß in der Parabel die Quadrate der Ordinaten ſich verhalten wie die zugehörigen Abſciſſen. Denn bezieht man x, y auf einen beſtimmten Punct, und x′, y′ auf irgend einen andern Punct, ſo iſt

$$y^2 : y'^2 = cx : cx' = x : x'.$$

Die Gleichung $y = \sqrt{cx}$ lehrt auch zu jeder Abſciſſe die Ordinate durch Conſtruction finden, wenn die Länge c des Parameters gegeben iſt.

II.) In der Ellipſe iſt Fig. 88.

$$Pp^2 + F_1p^2 = F_1P^2$$

$$\text{und} \quad Pp^2 + F_2p^2 = F_2P^2$$

oder, wenn man $Pp = y$, $Op = x$, $OF_1 (= OF_2) = w$, $F_1P = r_1$, $F_2P = r_2$ ſetzt:

$$y^2 + (w - x)^2 = r_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$y^2 + (w + x)^2 = r_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Ferner iſt, wenn man die halbe große Axe durch α bezeichnet:

$$r_1 + r_2 = 2\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Durch Subtraction der Gleichung (1) von (2) und mit Berückſichtigung der Gl. (3) erhält man

$$4wx = r_2^2 - r_1^2 = (r_2 + r_1)(r_2 - r_1) = 2\alpha(r_2 - r_1)$$

$$r_2 - r_1 = \frac{2wx}{\alpha}$$

$$r_2 + r_1 = 2\alpha$$

alſo

$$r_2 = \frac{wx}{\alpha} + \alpha$$

Digitized by Google

Nach Subſtitution dieſes Werthes in (2) und gehöriger Reduction folgt

$$\frac{x^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - w^2) + y^2 = \alpha^2 - w^2$$

Nun iſt aber $OF_1^2 = T_2F_1^2 - T_2O^2$, d. i., wenn man die halbe kleine Axe durch β ausdrückt:

$$w^2 = \alpha^2 - \beta^2$$

und dadurch geht die vorige Gleichung über in

$$\frac{x^2}{\alpha^2} \cdot \beta^2 + y^2 = \beta^2$$

oder

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

woraus wieder folgt

$$y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - x^2) = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha + x)(\alpha - x)$$

oder

$$y^2 : (\alpha + x)(\alpha - x) = \beta^2 : \alpha^2$$

Die Ueberſetzung dieſer Proportion in Worte giebt den Lehrſatz: das Quadrat einer Ordinate ſteht in conſtantem Verhältniß zu dem Rechteck aus den beiden Stücken, in welche der Fußpunct dieſer Ordinate die große Axe theilt. Zieht man aus allen Gliedern obiger Proportion die Wurzel, ſo lautet die Ueberſetzung: eine beliebige Ordinate der Ellipſe verhält ſich zu dem geometriſchen Mittel der beiden Stücke, in welche der Fußpunct dieſer Ordinate die große Axe theilt, wie die kleine Axe zur großen Axe; oder auch: beſchreibt man über der großen Axe einer Ellipſe einen Kreis und zieht ſenkrecht zu dieſer Axe eine beliebige Anzahl Sehnen, ſo verhält ſich jede Ellipſenſehne zu der in die nämliche Richtung fallende Kreisſehne wie die kleine Axe der Ellipſe zur großen. Umgekehrt: Man erhält eine halbe Ellipſe, wenn man aus den Puncten eines Halbkreiſes Senkrechte auf den Durchmeſſer

fällt und ſie alle in einem und demſelben Verhältniß verkürzt.

Die Form $x : \sqrt{(b + y)(b - y)} = a : b$, welche die Gleichung B noch zuläßt, führt auf ähnlichem Wege zu einem ähnlichen Lehrſatze.

III.) Setzt man in der Hyperbel $Op = x$, $Pp = y$, Fig. 89. $OF_1 (= OF_2) = w$, $OS_1 (= OS_2) = \alpha$, $PF_1 = r_1$, $PF_2 = r_2$, ſo iſt (vermöge der rechtwinkeligen Dreiecke PpF_1 und PpF_2)

$$y^2 + (x - w)^2 = r_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$y^2 + (x + w)^2 = r_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Ferner iſt

$$r_2 - r_1 = 2\alpha \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Aus dieſen drei Gleichungen folgt (wie vorhin in II)

$$4wx = 2\alpha\,(r_2 + r_1)$$

$$r_2 + r_1 = \frac{2wx}{\alpha}$$

$$r_2 - r_1 = 2\alpha$$

$$r_2 = \frac{wx}{\alpha} + \alpha$$

und nach Subſtitution dieſes Werthes in (2):

$$\frac{x^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - w^2) + y^2 = \alpha^2 - w^2$$

Man ſieht, daß bisher ſowohl das Verfahren ſelbſt als das Reſultat desſelben das nämliche iſt, wie bei Herleitung der auf die Ellipſe bezüglichen Gleichung (in II), nur daß jetzt die Größe w nicht durch andere bereits gegebene Größen ausgedrückt werden kann. So wie aber dort (in II) durch die Subſtitution $w^2 = \alpha^2 - \beta^2$ die Gleichung ſich bedeutend vereinfachte, ſo kann man auch hier auf eine einfachere Form kommen, wenn man w als die Hypotenuſe eines rechtwinkeligen Dreiecks nimmt, deſſen eine Kathete α iſt, und den Werth der andern Kathete in die Rechnung einführt. (Dieſe Annahme iſt erlaubt, da $w > \alpha$). Bedeutet β den Werth dieſer zweiten Kathete, ſo iſt $w^2 = \alpha^2 + \beta^2$ und die letzte Gleichung verwandelt ſich in

$$-\frac{x^2\beta^2}{\alpha^2}+y^2=-\beta$$

oder
$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1\quad.\quad.\quad.\quad.\quad(C)$$

und hieraus ergiebt ſich
$$y^2=\frac{\beta^2}{\alpha^2}(x^2-\alpha^2)\quad.\quad.\quad.\quad(4)$$

oder $\quad y^2:(x-\alpha)(x+\alpha)=\beta^2:\alpha^2$

Geht man auf die geometriſche Bedeutung dieſer letzten Gleichung ein, ſo folgt, daß das Quadrat der Ordinate in conſtantem Verhältniß ſteht zu dem Rechteck aus den beiden Stücken, welche zwiſchen dem Fußpuncte der Ordinate und den beiden Scheiteln enthalten ſind.

Um β durch Conſtruction zu finden, hat man in S_1 eine Senkrechte S_1A auf S_1S_2 zu errichten und ſie mit OF_1 von O aus in A zu durchſchneiden; dann iſt $S_1A=\beta$.

Die Verlängerung der Hypotenuſe OA liegt ganz außerhalb der Hyperbel; denn fällt man aus einem beliebigen Puncte Q in ihr eine Senkrechte Qp auf S_1S_2, welche die Hyperbel in P trifft, und ſetzt $Op=x$, ſo iſt (wegen Aehnlichkeit der Dreiecke OS_1A und OpQ)

$$Qp:\beta=x:\alpha$$
$$Qp=\frac{\beta}{\alpha}\cdot x;$$

nach (4) iſt
$$Pp=\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2-\alpha^2};$$

da nun offenbar $x^2-\alpha^2<x^2$, oder $\sqrt{x^2-\alpha^2}<x$, ſo iſt auch immer $Pp<Qp$. Der Unterſchied zwiſchen beiden Längen wird aber immer unbedeutender, je weiter man die Senkrechte QPp vom Scheitel entfernt, d. i. je größer man x nimmt; denn in dem für Pp ſtehenden Ausdrucke $\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2-\alpha^2}=\frac{\beta}{\alpha}\cdot x\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{x^2}}$ nähert ſich mit dem

Digitized by Google

Wachſen von x der Bruch $\frac{\alpha^2}{x^2}$ immer mehr der Grenze Null; daher nähert ſich der Ausdruck ſelbſt mehr und mehr dem Werthe $\frac{\beta}{\alpha} x \sqrt{1} = \frac{\beta}{\alpha} . x$, d. i. dem Werthe von Op, ohne je ganz mit dieſem zuſammenzufallen. Hieraus folgt, daß die Linie OAO eine Aſymptote der Curve iſt. Eben ſo nähert ſich die Verlängerung von AO nach der entgegengeſetzten Seite ohne Ende dem andern Aſte $P_0 S_2 P_0$ der Curve. Aus der Symmetrie beider Aeſte ergiebt ſich noch, daß man eine zweite Aſymptote QO erhält, wenn man $\angle T_2OQ = \angle T_2OO$ macht. *)

§. 193.

Eine Parabel iſt völlig beſtimmt, wenn man ihren Parameter kennt (oder, was auf daſſelbe hinauskommt, die Entfernung SF ihres Brennpuncts vom Scheitel). Um daher eine Parabel zu zeichnen, welche einer gegebenen ähnlich iſt, d. h. um eine Parabel in verjüngtem oder vergrößertem Maßſtabe zu copiren (vgl. §. 177), dürfte man

*) Jede der oben gefundenen drei Gleichungen A, B, C enthält eine in der Sprache der Analyſis ausgedrückte Definition der betreffenden Curve. So wird in der analytiſchen Geometrie überhaupt jede Curve durch eine Gleichung dargeſtellt, und je nachdem dieſe Gleichung eine algebraiſche oder transſcendente iſt, heißt die Curve ſelbſt eine algebraiſche oder transſcendente. Ferner wird eine algebraiſche Curve eine Linie der nten Ordnung genannt, wenn ihre Gleichung vom nten Grade iſt und deshalb ſind die oben betrachteten drei Curven Linien der zweiten Ordnung. Zugleich beweiſt die analytiſche Geometrie, daß es außer dieſen dreien keine Linie zweiter Ordnung mehr geben kann.

Eine Linie der nten Ordnung wird von einer Geraden in höchſtens n Puncten geſchnitten. Die obigen Curven können hiernach von einer Geraden in nicht mehr als zwei Puncten getroffen werden, was ſich auch reingeometriſch leicht beweiſen läßt.

nur die Länge des Parameters beliebig ändern. Daraus folgt aber, daß alle möglichen Parabeln als unter ſich ähnlich anzuſehen ſind.

Eine Ellipſe iſt beſtimmt durch die Werthe ihrer Halbaxen α und β. Daher ſind zwei Ellipſen ähnlich, wenn das Verhältniß der Axen in beiden das nämliche iſt.

Eine Hyperbel iſt beſtimmt durch ihre reelle Halbaxe α und durch das Stück S_1A, welches in §. 192, III. durch β bezeichnet wurde (oder, was eben ſo viel bedeutet, durch die Lage ihrer Scheitel und ihrer Brennpuncte; denn mittelſt β kann man die Brennpuncte finden). Demnach ſind zwei Hyperbeln ähnlich, wenn in beiden die Größen α, β daſſelbe Verhältniß zu einander haben. Durch das Verhältniß $\alpha:\beta$ iſt aber der Winkel der Aſymptoten gegeben, weshalb man auch ſagen kann, alle Hyperbeln ſeien ähnlich, welche man bei verſchiedenen reellen Axen zwiſchen dieſelben Aſymptoten beſchreiben kann.

§. 194.

Anmerk. Die Parabel, Ellipſe und Hyperbel ſtehen unter ſich in genauer Verwandtſchaft, und eine weitere Unterſuchung ihrer Eigenſchaften zeigt, daß man ſie als drei beſondere Fälle eines allgemeinern Falles betrachten kann. Sucht man nämlich den geometriſchen Ort eines Punctes, deſſen Entfernung von einem gegebenen Puncte zu ſeiner Entfernung von einer gegebenen Geraden ein gegebenes Verhältniß $m:n$ hat, ſo kommt man auf die Parabel, wenn $m=n$ iſt (vgl. §. 189); auf die Ellipſe, wenn $m<n$ iſt; und auf die Hyperbel, wenn $m>n$ iſt.

Die genannten drei Curven erſcheinen auch, wenn man die Fläche eines Kegels von kreisförmiger Baſis nach beiden Seiten erweitert denkt (indem man jede auf der Kegelfläche liegende Gerade über die Baſis hinab und über die Spitze hinaus ohne Ende verlängert) und dann durch Ebenen ſchneidet. Es entſteht eine Ellipſe, oder Parabel, oder Hyperbel, je nachdem eine durch die Spitze gehende und zur ſchneidenden parallele Ebene mit dem Ke-

Digitized by Google

gel keine, oder eine, oder zwei Gerade gemein hat. Deshalb führen jene drei Curven auch den gemeinſchaftlichen Namen Kegelſchnitte. *)

Projectionen ebener Curven.

§. 195.

Die Projection einer ebenen Curve wird in dem beſondern Falle eine gerade Linie, wenn die Ebene der Curve ſenkrecht zur Grundebene ſteht; in allen andern Fällen muß die Projection wieder krummlinig ſein. Iſt die Ebene der Curve parallel zur Grundebene, ſo iſt die Projection congruent der wahren Curve (§. 28, Zuſ. I.).

Hat eine Curve einen nfachen Punct, ſo iſt die Projection derſelben ein nfacher Punct für die Projection der Curve; denn eine an der wahren Curve hinbewegte Gerade, welche ſtets ſenkrecht auf der Grundebene bleibt, fällt nmal in das Projectionsloth des nfachen Punctes, alſo geht der von ihrem Fußpuncte beſchriebene Weg (d. i. die Projection der Curve) nmal durch die Projection jenes Punctes.

Die Projection der Tangente am Puncte A einer Curve berührt die Projection der Curve in der Projection a von A. Denn dreht ſich um A eine Gerade G, welche die Curve noch in B ſchneidet, ſo lange, bis B in A fällt, ſo wird die Projection b von B ſich der Projection a nähern und endlich in ſie fallen; die Projection g der G wird alſo in dem Augenblicke Tangente an der Curvenprojection, in welchem G Tangente an der wahren Curve geworden iſt. Die projicirende Ebene der Tangente trennt den Raum in zwei Ab-

*) Jeder Schnitt der Kegelfläche iſt eine Centralprojection des dem Kegel zur Baſis dienenden Kreiſes auf die ſchneidende Ebene, und mit Hülfe einiger auf Centralprojectionen bezüglicher Lehrſätze laſſen ſich die meiſten Eigenſchaften der Kegelſchnitte aus den Eigenſchaften des Kreiſes ſehr einfach ableiten. (S. des Verfaſſers Grundzüge einer Theorie der Kreisprojectionen).

theilungen, und es iſt klar, daß irgend ein Punct der wahren Curve und die Projection dieſes Punctes in eine und dieſelbe Abtheilung fallen müſſen. Daraus folgt unmittelbar, daß die Projection des Wendepuncts einer Curve ein Wendepunct für die Projection der Curve ſein muß. Eben ſo iſt die Projection eines Rückkehrpunctes wieder ein Rückkehrpunct für die Projection der Curve, und zwar bildet die Projection eine Spitze oder einen Schnabel, je nachdem das eine oder das andere bei der wahren Curve der Fall iſt. Die Projection einer Aſymptote iſt eine Aſymptote der Curvenprojection; denn führt man ein Projectionsloth an dem unendlichen Zweige der wahren Curve fort, welcher ſich immer näher die Aſymptote hinzieht, ſo wird dieſes Loth immer näher an die projicirende Ebene der Aſymptote rücken und folglich auch ſein Fußpunct immer näher an die Projection der Aſymptote; zum wirklichen Zuſammenfallen kann es aber nicht kommen, weil dieß ein Zuſammenfallen eines Punctes der wahren Curve mit deren Aſymptote vorausſetzen würde.

Die obigen Sätze gelten ſämmtlich auch umgekehrt. (Iſt nämlich die Projection einer ebenen Curve eine Gerade, ſo ſteht die Ebene der Curve ſenkrecht auf der GE; hat die Projection einer ebenen Curve einen Wendepunct, ſo iſt dieſer die Projection für einen Wendepunct der wahren Curve; u. ſ. f.)

§. 196.

Sind die beiden Projectionen irgend einer (ebenen oder gewundenen) Curve ſo geſtaltet, daß jede von einer auf dem Grundſchnitte ſenkrechten Geraden mehrmals getroffen wird, ſo paſſen dieſe Projectionen für mehrere Curven zugleich, und um die Lage einer ſolchen Curve völlig zu beſtimmen, müſſen wenigſtens für einen Punct die zuſammengehörigen Projectionen beſonders bezeichnet ſein. So iſt es z. B. in Fig. 91, wenn ſie ohne nähere Bezeichnung gegeben iſt, ungewiß, welcher von den Puncten, in denen die auf dem Grundſchnitte ſenkrechte um die V-Projection der

Digitized by Google

Curve ſchneidet, als V-Projection zur H-Projection u gehört. Daraus aber, daß für einen benachbarten Curvenpunct die Projectionen s_1 und s' durch den gleichen Buchſtaben als zuſammengehörig bezeichnet ſind, folgt, daß zu u die näher am Grundſchnitte gelegene V-Projection gehört; denn es iſt überhaupt dadurch ausgeſprochen, daß dem Bogen vs_1w nicht der Bogen $v's''w'$, ſondern der Bogen $v's'w'$ als V-Projection entſpricht.

Der Fall, daß eine auf dem Grundſchnitte ſenkrechte Gerade die eine Curvenprojection in mehrern Puncten, die andere aber nur in einem Puncte ſchneidet, während beide Projectionen krummlinig ſind, kann zwar für gewundene Curven vorkommen; niemals aber, wenn die wahre Curve eben iſt; vielmehr werden die beiden Projectionen einer ebenen Curve immer in gleichviel Puncten geſchnitten. Nur in dem einzigen Falle, wenn die eine Projection der ebenen Curve gerade iſt, können zu einem Puncte in dieſer Projection mehrere Puncte der andern Projection zugleich gehören, weil in jener Geraden die Projectionen mehrerer Curvenbögen zuſammenfallen können. Projicirt ſich z. B. ein Kreis als Gerade, ſo iſt irgend ein Punct dieſer Geraden Projection für zwei Kreispuncte, und in der andern Grundebene gehören zu dieſem einen Puncte zwei verſchiedene Projectionen.

§. 197.

Aufg. Die Ebene einer Curve iſt (durch ihre Spuren) gegeben und die eine Projection der Curve. Man ſoll die andere Projection zeichnen.

Aufl. Wähle in der gegebenen Projection eine hinreichende Anzahl von Puncten, ſuche die zu jedem gehörige zweite Projection (§. 43) und lege durch die erhaltenen zweiten Projectionen eine ſtetige Curve.

Zuſ. Da man nun beide Projectionen der Curve und zugleich die Spuren ihrer Ebene kennt, ſo kann man dieſe Ebene in die eine oder andere Grundebene umklappen und dort die Curve in wahrer Geſtalt und Größe erhal-

ten. Man hat blos für eine Anzahl einzelner Curvenpuncte die Umklappungen zu ſuchen (§. 57) und durch eine ſtetige Curve zu verbinden.

§. 198.

Uebungsaufgabe. Zu unterſuchen, ob eine durch ihre Projectionen gegebene Curve eben oder gewunden ſei.

§. 199.

Aufg. In einer mit der HE zuſammenfallenden Ebene iſt eine Curve gegeben. Man verlangt die Projectionen derſelben, nachdem die Ebene um eine in der HE gezogene Gerade ſo weit gedreht worden iſt, daß ſie eine gegebene H-Neigung hat.

Aufl. Man beſchreibe in die Curve ein beliebiges Polygon von hinreichender Seitenzahl, projicire nach der Drehung der Ebene dieſes Polygon (§. 122) und führe durch die Eckpuncte jeder Projection eine ſtetige Curve. (Die Seiten des Polygons braucht man nirgends wirklich zu ziehen, da es ſich einzig um die Ecken handelt.)

Kreispro ection.

§. 200.

Der Mittelpunct eines Kreiſes liege in der Grundebene, ſo daß dieſe alſo die Kreisebene nach einem Durchmeſſer D ſchneidet; dann iſt klar, daß die Projection des oberhalb der Grundebene liegenden Halbkreiſes congruent iſt der Projection des unterhalb liegenden, oder daß die Projection des ganzen Kreiſes durch jenen Durchmeſſer in congruente Hälften getheilt wird. Fällt man man nun aus verſchiedenen Puncten des obern Halbkreiſes ſenkrechte Ordinaten auf den Durchmeſſer D und projicirt ſie, ſo ſind ihre Projectionen ebenfalls auf dem Durchmeſſer ſenkrecht und bei der Umklappung der Kreisebene wird jede Ordinate in

Digitized by Google

die Richtung ihrer Projection fallen. Eine ſolche Ordinate im Kreiſe ſtellt (vor der Umklappung) die Hypotenuſe eines rechtwinkeligen Dreiecks vor, welches zur einen Kathete die Projection der Ordinate und zur andern die Grund-Diſtanz des betreffenden Kreispunctes hat; alle dieſe Dreiecke aber, welche zu den verſchiedenen Ordinaten gehören, ſind unter ſich ähnlich, weil ſie alle die Grund-Neigung der Kreisebene enthalten, und alſo iſt das Verhältniß der Ordinate zu ihrer Projection immer daſſelbe. Demnach erhält man die Projection des Halbkreiſes, wenn man in ſeiner Umklappung die erwähnten Ordinaten ſämmtlich in jenem Verhältniſſe (welches durch die Grund-Neigung der Kreisebene gegeben iſt) verkürzt und hieraus iſt zu erſehen, daß die Projection des Kreiſes eine Ellipſe ſein muß (vgl. §. 192, II., gegen Ende), welche den Durchmeſſer D zur großen Are hat; die kleine Are iſt die Projection desjenigen Durchmeſſers, welcher auf D ſenkrecht iſt.

Hat man einen Kreis zu projiciren, deſſen Mittelpunct nicht in der Grund-Ebene liegt, und man führt parallel zu letzterer eine Ebene durch den Mittelpunct, ſo hat der Kreis auf dieſer Ebene und auf der eigentlichen Grund-Ebene congruente Projectionen. Die Projection eines Kreiſes iſt daher in allen Fällen, in denen ſie nicht in eine Gerade übergeht, eine Ellipſe; die große Are iſt die Projection des mit der Grundebene parallelen Durchmeſſers (und alſo dieſem an Länge gleich), die kleine die Projection des Durchmeſſers, der auf jenem (oder auf der Spur der Kreisebene) ſenkrecht ſteht. *)

§. 201.

Die Projection des Kreismittelpuncts iſt der Mittelpunct der Ellipſe; eine Sehne der Ellipſe, welche durch den Mittelpunct geht, heißt ein Durchmeſſer und iſt (als Pro-

---

*) Hier zeigt ſich abermals, daß der Kreis als beſonderer Fall unter die Ellipſen zu zählen iſt, indem die Projection eines zur Grundebene parallel liegenden Kreiſes wieder ein Kreis wird.

Digitized by Google

jection eines Kreisdurchmeſſers) im Mittelpuncte *halbirt*. (§. 25).

Die Projectionen irgend zweier aufeinander ſenkrechten Kreisdurchmeſſer heißen *zugeordnete* (conjugirte) Durchmeſſer der Ellipſe. *) *Von zwei zugeordneten Ellipſendurchmeſſern halbirt jeder alle Sehnen, die mit dem andern parallel ſind, und geht durch die Berührungspuncte zweier mit dem andern parallelen Tangenten* **); denn dieſer Satz gilt bekanntlich im Kreiſe für zwei aufeinander ſenkrechte Durchmeſſer, und muß (nach §§. 22, 25, 195) auch noch gelten, wenn man auf die Projectionen übergeht.

Legt man an eine Ellipſe zwei Tangenten durch die Endpuncte einer beliebigen Sehne, ſo ſchneiden ſich dieſe Tangenten auf der Verlängerung des Durchmeſſers, welcher die Sehne halbirt; denn dasſelbe iſt im Kreiſe der Fall.

Iſt von einer Ellipſe blos die Peripherie gegeben, ſo findet man den *Mittelpunct*, wenn man durch die Halbirungspuncte irgend zweier parallelen Sehnen eine Gerade legt und das in die Ellipſe fallende Stück, welches (nach dem Vorigen) ein *Durchmeſſer* ſein muß, halbirt.

Um die *Axen* zu erhalten (d. h. zwei zugeordnete Durchmeſſer, welche auf einander *ſenkrecht* ſtehen), beſchreibe man um den Mittelpunct einen Kreis, welcher die Ellipſe in vier Puncten ſchneidet, verbinde von dieſen Schnittpuncten zwei aufeinander folgende P, P_0 (Fig. 88) und lege durch den Mittelpunct O eine Parallele S_1S_2 zu PP_0 und eine Senkrechte T_1T_2 auf ſie; dieſe beiden Linien ſind die

---

*) Demnach ſind auch die beiden *Axen* zugeordnete Durchmeſſer.

**) Auch für die *Hyperbel* gilt ein ähnlicher Satz; nur daß hier einem von der Curve begrenzten Durchmeſſer immer ein endloſer zugeordnet iſt, welcher die Curve nirgends trifft.

In der *Parabel* liegen die Halbirungspuncte paralleler Sehnen und der Berührungspunct einer mit ihnen parallelen Tangente auf einer Geraden, welche der Axe parallel iſt.

Digitized by Google

Axen; denn ſie ſind nicht nur auf einander ſenkrechte, ſondern auch einander zugeordnete Durchmeſſer, indem PP_0 (als Sehne des um O beſchriebenen Kreiſes) von T_1T_2 halbirt wird.

Zu irgend einem gegebenen Durchmeſſer findet man den zugeordneten, wenn man mit jenem parallel eine Sehne zieht und durch ihren Halbirungspunct einen Durchmeſſer legt. Oder man kann, wenn die große Axe S_1S_2 bekannt iſt, auf folgende Weiſe verfahren: Iſt op die Hälfte des gegebenen Durchmeſſers, ſo fälle man pm $\perp S_1S_2$; beſchreibe über S_1S_2 einen Halbkreis, verbinde den Punct P_1, wo dieſer die verlängerte mp trifft, mit dem Mittelpuncte o, errichte $oQ_1 \perp oP_1$ und fälle $Q_1n \perp S_1S_2$; dann iſt oq die Hälfte des zu op geordneten Durchmeſſers; denn betrachtet man den Halbkreis $S_1P_1Q_1S_2$ als die Umklappung desjenigen Halbkreiſes S_1PQS_2, der ſich als die Ellipſenhälfte S_1pqS_2 projicirt, ſo iſt po die Projection von Po und qo die Projection von Qo, oder es ſind po und qo die Projectionen zweier aufeinander ſenkrechten Kreishalbmeſſer. Fig. 90.

Soll an eine Ellipſe eine Tangente parallel mit einer gegebenen Geraden gelegt werden, ſo ziehe man einen mit ihr parallelen Durchmeſſer und ſuche den zugeordneten; von den Endpuncten des letztern kann jeder als Berührungspunct der verlangten Tangente genommen werden. Iſt der Berührungspunct einer Tangente gegeben, ſo kann man die Tangente ſelbſt erhalten, wenn man nach dem Berührungspuncte einen Durchmeſſer zieht und den zugeordneten zeichnet; mit letzterem iſt die geſuchte Tangente parallel. Kennt man aber die Peripherie der Ellipſe nicht, ſondern nur den Berührungspunct p und die große Axe S_1S_2, ſo errichte man über S_1S_2 einen Halbkreis, fälle pm $\perp S_1S_2$, verlängere ſie bis zum Durchſchnitt P_1 mit dem Halbkreis, lege durch P_1 an letztern eine Tangente, welche die verlängerte S_2S_1 in R trifft und ziehe Rp; dann iſt Rp die Tangente in p; denn läßt man die Ellipſe als die Projection eines Kreiſes gelten, von welchem ein Durchmeſſer S_1S_2 in der Fig. 90.

Digitized by Google

Grundebene liegt, ſo nimmt der in p projicirte Punct P nach Umklappung der Kreisebene die Lage P_1 ein; R iſt die Spur der durch P gezogenen Kreistangente, alſo Rp ihre Projection, d. i. eine Tangente der Ellipſe, in welche ſich der Kreis projicirt.

Der Flächeninhalt einer Ellipſe ergiebt ſich aus dem Flächeninhalte des Kreiſes, deſſen Projection ſie iſt, und aus der Grundneigung der Kreisebene; denn der in §. 127 bewieſene Lehrſatz muß auch noch für den Grenzfall gelten, in welchem der Umfang eines Polygons durch fortwährende Vermehrung der Seitenzahl in eine krumme Linie übergegangen iſt. Bedeutet α den Halbmeſſer des Kreiſes und φ die Grundneigung ſeiner Ebene, ſo iſt der Inhalt der elliptiſchen Kreisprojection $= \alpha^2\pi \cdot \cos\varphi$; zugleich iſt α die große Halbaxe der Ellipſe, und $\alpha \cos\varphi$ der Werth der kleinen Halbaxe β, ſo daß der obige Ausdruck für den Inhalt der Ellipſe in $\alpha\beta\pi$ übergeht. Demnach iſt die Fläche einer Ellipſe der Fläche eines Kreiſes gleich, welcher das geometriſche Mittel beider Halbaxen zum Halbmeſſer hat.

§. 202.

Iſt eine Ellipſe als H-Projection eines Kreiſes gegeben, ſo iſt die H-Spur der Kreisebene mit der großen Axe parallel; die H-Neigung dieſer Ebene findet man durch Conſtruction eines rechtwinkeligen Dreiecks, welches die große Axe zur Hypotenuſe und die kleine Axe zur einen Kathete hat; man kann daher die Lage der Kreisebene ſelbſt angeben, ſobald man einen Punct in ihr kennt. Doch wird man immer noch zwiſchen zwei Lagen die Wahl haben, da man die gefundene Grundneigung ſowohl oberhalb als unterhalb der HE antragen kann.

Man ſieht hieraus, daß, wenn die Projection eines Kreiſes auf einer Grundebene gegeben iſt und man zugleich weiß, in welcher Diſtanz der Mittelpunct über oder unter dieſer Grundebene liegt, es nur zwei Kreiſe geben kann, denen die Projection entſpricht, und daß dieſe Kreiſe völlig

Digitized by Google

beſtimmt ſind ohne Hülfe einer zweiten Grundebene. (Wäre von der Grund-Diſtanz des Mittelpuncts blos der abſolute Werth angegeben, ſo gäbe es vier Kreiſe).

§. 203.

Da eine Ellipſe durch ihre beiden Axen gegeben iſt, ſo wird man, um einen Kreis zu projiciren, zunächſt die beiden Axen der Projection ſuchen, und dann aus dieſen die Ellipſe ſelbſt conſtruiren.

Um nun mittels der Axen die Peripherie einer Ellipſe zu finden, kann man die Brennpuncte beſtimmen (indem man die große Axe von einem Endpuncte der kleinen aus mit der halben großen Axe durchſchneidet) und die in §. 190 angegebene Conſtruction vornehmen. Auf eine andere Art der Conſtruction leitet folgender Lehrſatz:

Durchſchneidet man von irgend einem Puncte p der Peripherie aus die kleine Axe einer Ellipſe mit der halben großen Axe und verbindet den erhaltenen Schnittpunct w mit jenem Puncte, ſo iſt das Stück vw der Verbindungslinie, welches zwiſchen beiden Axen enthalten iſt, dem Unterſchiede der Axen gleich. Fig. 90.

Zum Beweiſe dieſes Satzes beſchreibe man über der großen Axe S_1S_2 einen Halbkreis, fälle $pm \perp S_1S_2$, verlängere ſie, bis ſie den Halbkreis in P_1 trifft, und ziehe P_1o. Nun iſt P_1o ($= oS_1$) $= pw$, $P_1p \parallel ow$; daher auch $pw \parallel P_1o$ und

$$pv : P_1o = pm : P_1m = oT_1 : oS_1$$
$$pv : oT_1 = P_1o : oS_1 = 1 : 1$$

alſo $pv = oT_1$

und $vw = oS_1 - oT_1$

Trägt man demnach auf eine gerade Linie (etwa auf den geradlinigen Rand eines Papierſtreifens) drei Puncte p, v, w ſo auf, daß pw der großen und pv der kleinen Axe gleich iſt, und führt dieſe Linie ſo, daß w immer auf der kleinen und v immer auf der großen Axe bleibt, ſo iſt jede Lage des Punctes p ein Punct der Ellipſe.

Digitized by Google

§. 204.

Aufg. In einer gegebenen Ebene PQP′ liegt ein Kreis vom Halbmeſſer ϱ ſo, daß die H-Projection ſeines Mittelpunctes in o fällt. Man ſoll die Projectionen des Kreiſes zeichnen.

Fig.91. Aufl. Ziehe $s_1os_2 \parallel PQ$, mache $os_1 = os_2 = \varrho$. Suche die H-Neigung α der Ebene PQP′ (§. 73); zeichne $\triangle$ xyz ſo, daß $\angle xyz = \alpha$, $\angle xzy = 90°$, $xy = \varrho$. Fälle $t_1ot_2 \perp QP$, mache $ot_1 = ot_2 = yz$. Dann ſind s_1s_2, t_1t_2 die Axen für die H-Projection des Kreiſes.

Auf ähnliche Weiſe findet man, nachdem die V-Projection o′ des Mittelpuncts beſtimmt wurde, die Axen für die V-Projection des Kreiſes.

§. 205.

Aufg. Drei Puncte ſind durch ihre Projectionen gegeben; man zeichne die Projectionen des durch ſie gehenden Kreiſes.

Aufl. Sucht man die Spuren der durch die drei Puncte gehenden Ebene und die Lage dieſer Puncte in der Umklappung der Ebene, ſo kann man in eben dieſer Umklappung auch leicht den Mittelpunct und den Halbmeſſer des fraglichen Kreiſes finden. Hierauf führe man die Ebene aus der Umklappung in ihre urſprüngliche Lage zurück, beſtimme die Projectionen jenes Mittelpuncts und löſe die vorige Aufgabe.

§. 206.

Aufgabe. Für die H-Projection eines Kreiſes ſind die Hälften oa, ob zweier zugeordneter Durchmeſſer gezeichnet, und außerdem noch die H-Diſtanz des Mittelpuncts gegeben; man ſoll die Spuren der Kreisebene finden.

Aufl. Zieht man ab, ſo iſt $\triangle$ aob die Projection eines Dreiecks AOB, in welchem $\angle O = 90°$, $\angle A = \angle B = 45°$ iſt, und man hat nun die Aufgabe des §. 125 zu löſen.

Digitized by Google

B.) Ueber gewundene Curven und ihre Projectionen.

§. 207.

Was in den erſten §§ dieſes Kapitels, dann in den Anmerkungen zu §. 181 und §. 186 über gewundene Curven erwähnt wurde, iſt vorläufig hinreichend, von der Natur ſolcher Curven einen allgemeinen Begriff zu geben. Mehreres wird noch ſpäter beigebracht werden, bei Gelegenheit ſolcher Aufgaben, welche auf gewundene Curven führen.

Liegen alle Puncte einer gewundenen Curve gleichweit von einem gewiſſen Puncte entfernt (alſo auf der Oberfläche einer Kugel), ſo heißt die Curve ſphäriſch. So wird z. B. eine ſphäriſche Epicycloide durch einen auf der Fläche eines geraden Kegels angenommenen Punct beſchrieben, wenn dieſer Kegel ſich auf einem andern geraden Kegel wälzt, mit welchem er die Spitze gemein hat.

Die Projection einer Tangente an einer gewundenen Curve iſt wieder Tangente an der Projection der Curve, was gerade ſo zu beweiſen iſt, wie es in §. 195 für ebene Curven geſchah.

§. 208.

Die Projection einer gewundenen Curve kann niemals eine gerade Linie werden; denn dieß würde vorausſetzen, daß ſämmtliche Puncte der Curve in der durch dieſe Gerade gehenden projicirenden Ebene lägen. Wohl aber können die Projectionen mehrerer Bögen oder Zweige der Curve ineinanderfallen. (Denkt man ſich z. B. eine Ebene, in welcher eine Ellipſe gezeichnet iſt, um einen geraden Cylinder geſchlagen, deſſen Baſis in der Grundebene liegt, ſo projicirt ſich die gewundene Curve, in welche ſich die Ellipſe umgeändert hat, als ein Bogen der Baſis; jeder Punct dieſes Bogens, mit Ausnahme der beiden Endpuncte, ſtellt aber die gemeinſchaftliche Projection zweier Curvenpuncte vor.) In ſolchen Fällen wird ein mehrfacher Punct der gewundenen Curve ſich in der Projection nicht bemerkbar machen, wäh-

rend in allen andern Fällen die Projection eines nfachen Punctes wieder ein nfacher Punct für die Curvenprojection iſt. Umgekehrt aber darf man aus einem mehrfachen Puncte der Projection nicht auf einen mehrfachen Punct der wahren Curve ſchließen (ſo wenig wie aus dem Schneiden zweier geradlinigen Projectionen auf ein Schneiden der Geraden im Raume), wenn man nicht noch eine zweite Projection der Curve vergleichen kann; nur dann wird ſich die wahre Curve wirklich durchſchneiden, wenn jede ihrer beiden Projectionen ſich durchſchneidet und die Verbindungslinie der Schnittpuncte auf dem Grundſchnitt ſenkrecht ſteht.

Wenn für irgend einen Punct einer gewundenen Curve die Berührungsebene ſenkrecht auf der Grundebene ſteht, ſo iſt die Projection dieſes Punctes entweder ein Wendepunct oder ein Rückkehrpunct der Curvenprojection. Denn die Projectionen der beiden in der Berührungsebene liegenden Curven-Elemente fallen hier in die Spur dieſer Ebene; alſo erſcheint entweder die eine Projection als Verlängerung der andern, oder beide decken ſich. Wenn daher etwa eine Projection einer gewundenen Curve eine Spitze hat, ſo berechtigt dieß noch nicht zu der Annahme, daß auch die wahre Curve eine Spitze habe.

Schraubenlinien.

§. 209.

Als Beiſpiel für das Projiciren gewundener Curven mag eine Linie dienen, deren Entſtehungsgeſetz ſehr einfach iſt und welche auch ſpäter öfter wieder zur Sprache kommen wird.

Man denke ſich die projicirende Ebene einer gegen die Grundebene geneigten Gerade S zu einem projicirenden Cylinder gebogen, ſo daß die geradlinige Projection G der S zu irgend einer geſetzmäßigen ebenen Curve wird; dann verwandelt ſich die Gerade S in eine gewundene Curve, welche jene aus G entſtandene Curve zur Projection hat und eine Schraubenlinie im weitern Sinne heißt. Eine Schraubenlinie im engern Sinne iſt diejenige, welche entſteht, wenn

die Gerade G zu einem Kreiſe, alſo die Ebene ſelbſt zur Mantelfläche eines gewöhnlichen geraden Cylinders gekrümmt oder um einen ſolchen Cylinder gerollt wird. Von dieſer ſoll, ihrer beſondern Wichtigkeit wegen, hier vorzugsweiſe die Rede ſein, und der Name Schraubenlinie iſt, wenn er ohne weitern Beiſatz ſteht, künftig immer im engern Sinne zu nehmen. Der Kreis G (ihre Projection) heißt der Grundkreis, und jener gerade (projicirende) Cylinder der Schraubencylinder.

Man kann vor dem Biegen der Ebene eine Anzahl projicirender Linien in ihr durch verſchiedene Puncte der Geraden S ziehen. Dieſe Linien bleiben auf der G fortwährend ſenkrecht, wenn letztere ſich auch in einen Kreis verwandelt, und ſie geben alſo projicirende Linien für die Puncte der Schraubenlinie ab, welche aus der S entſteht. Windet man die um den Schraubencylinder gebogene Ebene von dieſem zum Theil wieder ab und hält das abgelöſ'te Stück geſpannt, ſo wird das freigewordene Ende der S die Verlängerung des letzten Elements der Schraubenlinie vorſtellen, alſo eine Tangente derſelben. Da nun die Gerade S in der Ebene mit den projicirenden Linien ihrer ſämmtlichen Puncte immer denſelben Winkel bildet, ſo iſt auch der Winkel immer der nämliche, welchen irgend eine Tangente der Schraubenlinie S mit dem Projectionslothe ihres Berührungspunctes einſchließt, d. h. die Schraubenlinie ſchneidet alle auf dem Cylinder möglichen Geraden unter einem und demſelben Winkel.

Irgend eine auf der Cylinderfläche gezogene Gerade (Mantellinie) wird von der Schraubenlinie unendlich oft geſchnitten. Das Stück der letztern, welches zwiſchen zwei aufeinanderfolgenden ſolchen Schnittpuncten enthalten iſt, heißt ein Umgang oder Schraubengang, und das Stück der Mantellinie zwiſchen den genannten Puncten die Höhe des Schraubengangs oder kurz die Ganghöhe. Dieſe hat überall dieſelbe Größe, wo ſie auch abgenommen werden mag, und eben ſo haben alle Umgänge einerlei Länge. Denn betrachtet man denjenigen Umgang, der ſeinen Anfangspunct

im Grundkreiſe G hat, und breitet das Stück der Cylinderfläche, welches durch dieſen Grundkreis, den Umgang und die Ganghöhe begrenzt iſt, in eine Ebene aus, ſo entſteht ein rechtwinkeliges Dreieck, welches als eine Kathete die Ganghöhe, als andere Kathete die rectificirte Kreisperipherie, und dieſer gegenüber den Winkel zwiſchen der Schraubenlinie und der Mantellinie des Cylinders hat. Die Größe dieſes Winkels iſt überall dieſelbe, und eben ſo iſt der Grundkreis immer derſelbe, durch welchen Punct der Schraubenlinie man ihn auch gezogen denken mag; daher iſt jenes rechtwinkelige Dreieck ebenfalls immer dasſelbe, oder ſeine Hypotenuſe (der rectificirte Umgang) und die als Kathete erſcheinende Ganghöhe ſind von conſtanter Größe.

Bezeichnet r den Halbmeſſer des Grundkreiſes, h die Ganghöhe, φ den Winkel zwiſchen der Schaubenlinie und der Mantellinie des Cylinders, ſo läßt ſich mittels des ebenerwähnten Dreiecks aus je zweien dieſer Größen r, h, φ die dritte finden, und die Schraubenlinie ſelbſt iſt durch zwei ſolche Größen völlig beſtimmt.

In der Ebene wachſen die von einzelnen Puncten der S auf die G gefällten Lothe proportional mit den Stücken, welche ſie auf G (vom Schnittpuncte der G und S an gerechnet) abſchneiden. Da dieſe Stücke ihre Länge durch die Biegung der G nicht ändern, ſo hat auch (wenn man die Ebene des Grundkreiſes G als HE nimmt) die H-Diſtanz eines Punctes der Schraubenlinie ein conſtantes Verhältniß zu dem Bogen des Grundkreiſes, welcher zwiſchen der Projection des Punctes und der H-Spur der Schraubenlinie enthalten iſt (wobei zu beachten, daß dieſer Bogen > 360° wird, wenn die H-Diſtanz die Ganghöhe überſteigt); es verhält ſich nämlich immer die H-Diſtanz zum Bogen wie die Ganghöhe zur Peripherie des Grundkreiſes. Hierin liegt ein Mittel, die V-Projection der Schraubenlinie zu zeichnen. *)

*) Zugleich ſieht man, daß man die Schraubenlinie ohne Hülfe des Cylinders entſtehen laſſen kann. Denkt man ſich nämlich eine begrenzte Gerade ſenkrecht auf einer unbegrenzten Ge-

Digitized by Google

Iſt der Halbmeſſer r des Grundkreiſes und die Ganghöhe h gegeben, ſo beſchreibe man in der HE den Grundkreis und theile ihn in n gleiche Theile. In eben ſo viele gleiche Theile zerlege man die Ganghöhe h. Soll nun A die H-Spur der Schraubenlinie vorſtellen, ſo iſt die H-Diſtanz dieſes Punctes $= 0$; die H-Diſtanz des Punctes B, der ſich in dem nächſten Theilpunct b projicirt, iſt $= \frac{1}{n} h$; die H-Diſtanz des nächſten Punctes C iſt $= \frac{2}{n} h$, u. ſ. f. Dieß wird hinreichen zum Verſtändniß der in Fig. 92 ausgeführten Conſtruction, wobei $a'z' = h$ iſt. Fig. 92.

Iſt einmal der erſte Umgang projicirt, ſo kann man die Projectionen der nächſten Umgänge dadurch erhalten, daß man auf der Projection jeder Mantellinie von der Projection des entſprechenden Punctes aus die Ganghöhe aufträgt. So findet man z. B. den Punct c'', wenn man $c'c'' = a'z'$ macht.

§. 210.

Aufg. An die in Fig. 92 dargeſtellte Schraubenlinie eine Tangente zu ziehen, wenn der Berührungspunct gegeben iſt.

Aufl. Iſt (c, c') der Berührungspunct, ſo denke man ſich das krummflächige Dreieck CcA in eine Ebene ausgebreitet, indem man ſeine Fläche vom Cylinder bis zur Mantellinie Cc ablöſ't und anſpannt. Die ſo erhaltene Ebene muß den Cylinder nach der Linie Cc berühren; die Gerade cA_1, in welche der Bogen cA übergeht, iſt eine Tangente des Grundkreiſes im Puncte c; die Hypotenuſe CA_1 des ebenen Dreiecks CcA_1 (d. h. der rectificirte Bogen CA der Fig. 92.

---

raden, und verleiht jener eine doppelte Bewegung, vermöge welcher ſie ſich um ihren Fußpunct, wie der Radius eines Kreiſes um ſeinen Mittelpunct, dreht, während zugleich dieſer Fußpunct ſelbſt auf der unbegrenzten Geraden **proportional mit jener Drehung** fortrückt, ſo beſchreibt der freie Endpunct der bewegten Geraden eine Schraubenlinie. Die feſte Gerade heißt die **Axe** derſelben.

Schraubenlinie) ſtellt die Tangente der Schraubenlinie im Puncte C vor und A_1 die H-Spur dieſer Tangente. Daraus ergiebt ſich zur Conſtruction der Tangentenprojectionen folgende Regel: Ziehe durch die H-Projection c des Berührungspuncts eine Tangente cA_1 an den Grundkreis, ſo iſt dieſe die H-Projection für die Tangente der Schraubenlinie; mache $cA_1 = \text{arc. } cA$ (§. 185), $A_1a^{I} \perp$ GS, ſo iſt $a^{I}c'$ die V-Projection.

Zuſ. I. So wie CA_1 die Länge des Schraubenbogens CA vorſtellt, ſo zeigt überhaupt jede Tangente der Schraubenlinie, von der HE bis zum Berührungspuncte gerechnet, die rectificirte Länge des zwiſchen denſelben Grenzen enthaltenen Stückes der Schraubenlinie.

Zuſ. II. Der Winkel CA_1c iſt das Complement des conſtanten Winkels A_1Cc, alſo ebenfalls conſtant; d. h. alle Tangenten der Schraubenlinie haben einerlei H-Neigung.

Zuſ. III. Um die H-Spur der Tangente im Puncte D zu finden, hätte man den Bogen dA vom Grundkreiſe abwickeln und als Tangente des Punctes d anſpannen müſſen; für die Tangente in E den Bogen eA, u. ſ. f. Daraus folgt, daß die H-Spuren ſämmtlicher Tangenten der Schraubenlinie in einer Evolvente des Grundkreiſes liegen.

Zuſ. IV. Die Tangenten für alle jene Puncte der Schraubenlinie, welche auf einerlei Mantellinie des Cylinders liegen, ſind parallel; denn ſie ſchneiden dieſe Mantellinie unter gleichen Winkeln und liegen zugleich in einerlei Ebene, weil ſie eine gemeinſchaftliche H-Projection haben. Daher ſind auch ihre V-Projectionen parallel.

Hat man demnach die Tangente für einen Punct zu finden, deſſen H-Diſtanz $> h$ iſt, ſo kann man das Rectificiren eines die Peripherie überſchreitenden Kreisbogens umgehen, indem man die Tangente für einen niedriger liegenden Punct derſelben Mantellinie ſucht und mit dieſer Tangente eine Parallele durch den gegebenen Punct zieht. Auf dieſem Wege iſt in Fig. 92 die V-Projection $a^{II}c''$ der

Digitized by Google

Tangente im Puncte (c, c'') gefunden. Oder man kann ſich auch die HE um die Ganghöhe empor gerückt denken, ſo daß $a^{II}z'$ den Grundſchnitt vertritt, und in dieſem Falle braucht man die Linie $a^{I}c'$ gar nicht zu ziehen.

§. 211.

Die Schraubenlinie iſt eine Curve von conſtanter Krümmung, d. h. der Krümmungshalbmeſſer (vgl. Anmerk. auf S. 140) iſt für jeden ihrer Puncte derſelbe. Um dieß zu beweiſen, ſubſtituire man für den Kreis, welcher dem Cylinder zur Baſis dient, ein reguläres Polygon P, ſo daß ſtatt des Cylinders ein regelmäßiges Prisma erſcheint und ſtatt der Schraubenlinie eine gebrochene Linie S. Je zwei aufeinanderfolgende Bruckſtücke dieſer letztern beſtimmen mit der Prismenkante, auf welcher ſie zuſammenſtoßen, ein Dreikant, und alle dieſe Dreikante müſſen unter ſich congruent ſein; denn in jedem derſelben iſt eine Seite $= \varphi$ (ſ. §. 209), die zweite $= 180° - \varphi$, und der Winkel zwiſchen dieſen beiden Seiten iſt einer von den gleichen Winkeln des Polygons P. Es folgt hieraus, daß in jedem ſolchen Dreikante auch die dritte Seite immer von derſelben Größe iſt, nämlich die Neigung zwiſchen zwei Bruchſtücken der S. Das Supplement dieſer Neigung wird nun der Contingenzwinkel der Schraubenlinie, ſobald man im Polygon P die Seitenzahl unendlich groß annimmt; und da demnach in der Schraubenlinie ſich der Contingenzwinkel von Punct zu Punct nicht ändert, ſo kann ſich auch der Krümmungshalbmeſſer nicht ändern.

Hierauf beruht die merkwürdige Eigenſchaft der Schraubenlinie, daß ſie ſich in ſich ſelbſt verſchieben läßt; eine Eigenſchaft, welche ſie nur noch mit dem Kreiſe und der Geraden theilt.

§. 212.

Übungsaufgabe. Die Spuren irgend einer Curve anzugeben, deren Projectionen vollſtändig gezeichnet ſind.

Digitized by Google

§. 213.

Aufg. Die Schnittpuncte einer gegebenen Curve A mit einer gegebenen Ebene E zu finden.

Aufl. Man laſſe die gegebene H-Projection der Curve A zugleich als H-Projection einer andern Curve B gelten, welche in der gegebenen Ebene liegt, und ſuche die V-Projection der B (§. 197). Die Puncte, in denen die V-Projectionen der A und B ſich ſchneiden, ſind die V-Projectionen der geſuchten Puncte; die zugehörigen H-Projectionen ergeben ſich mittels Senkrechter zum Grundſchnitt.

Zweites Kapitel.

Erzeugung und graphiſche Darſtellung krummer Flächen.

§. 214.

Was in §. 173 für krumme Linien geſagt wurde, wiederholt ſich in ähnlicher Weiſe auch bei krummen Flächen. Soll nämlich eine krumme Fläche einer mathematiſchen Unterſuchung unterworfen werden können, ſo muß ihr ein beſtimmtes Entſtehungsgeſetz zu Grunde liegen, in Folge deſſen ihre Geſtalt ſelbſt Geſetzmäßigkeit und Stetigkeit zeigt. Man kann ſich jede ſolche krumme Fläche durch Bewegung einer Linie oder einer andern Fläche erzeugt denken, und ſie iſt als gegeben zu betrachten, wenn man die erzeugende Linie oder Fläche kennt und das Geſetz, nach welchem dieſe ihre Lage (und vielleicht auch ihre Dimenſionen) ändert; dieſes Geſetz ſelbſt kann in vielen Fällen durch Hülfe einer gegebenen Linie oder Fläche ausgeſprochen werden müſſen.

So wenig man eine Ebene durch Projection ihrer ſämmtlichen Puncte darſtellen konnte, ſo wenig iſt dieß bei einer krummen Fläche möglich; doch muß die Art der graphiſchen Darſtellung einer Fläche immer ein Mittel ge-

Digitized by Google

währen, zu der einen Projection irgend eines Flächenpunctes die entſprechende zweite Projection zu finden, oder mit andern Worten: man muß im Stande ſein, jeden einzelnen Punct der Fläche in Projection zu legen, alſo auch jede Linie, die auf der Fläche gezogen werden kann.

Da bei einer krummen Fläche in Beziehung auf das Sichtbarſein einzelner Theile derſelbe Fall eintritt, wie bei einem Polyeder, ſo hält man ſich auch hier an die für die Darſtellung eines Körpers gegebene Regel; man zeichnet nämlich ſolche Linien, welche auf der vom Auge abgekehrten Seite der krummen Fläche gezogen ſind, punctirt (vgl. §. 129).

Im Folgenden ſollen die wichtigſten Gattungen krummer Flächen aufgeführt werden. Doch darf man dieſe Aufzählung nicht etwa für eine durchgreifende Claſſification der krummen Flächen halten; denn ſehr häufig kann eine und dieſelbe Fläche unter mehrere dieſer Gattungen zugleich eingereiht werden.

Cylinderflächen.

§. 215.

Bewegt ſich eine unbegrenzte Gerade ſo, daß ſie beſtändig einer gegebenen Richtung parallel bleibt und ſich in allen ihren Lagen an eine gegebene (ebene oder gewundene) Curve lehnt, ſo beſchreibt ſie eine Cylinderfläche im allgemeinſten Sinne des Worts. Eine Cylinderfläche iſt alſo der geometriſche Ort einer Geraden, welche eine gegebene Curve ſchneidet und dabei eine gegebene Richtung hat. Doch iſt dabei vorausgeſetzt, daß, falls die Curve eben iſt, ihre Ebene jener gegebenen Richtung nicht parallel ſei, indem ſonſt ſtatt der Cylinderfläche eine Ebene erzeugt werden würde. Die Curve heißt die Leitlinie oder Leitende (Directrix), die bewegliche Gerade die Erzeugende (Generatrix), jede einzelne Lage derſelben eine Mantellinie.

Eine Cylinderfläche iſt die Grenze für eine prismatiſch gebrochene Fläche, deren einzelne Seiten fortwährend an Zahl zu- und an Breite abnehmen.

So wie die parallelen Schnitte einer prismatiſchen Fläche, ſo ſind auch die parallelen Schnitte einer Cylinderfläche unter ſich congruent.

Eine Cylinderfläche iſt gegeben, wenn man die Projectionen der Leitenden und der Geraden kennt, mit welcher die Erzeugende parallel bleibt.

Zieht man auf einer Cylinderfläche eine beliebige krumme Linie, welche alle Mantellinien ſchneidet, ſo kann dieſe als eine neue Leitende an die Stelle der urſprünglichen Leitenden geſetzt werden; alſo giebt es unendlich viele Curven, welche als Leitende für eine und dieſelbe Cylinderfläche auftreten können.

§. 216.

Fig. 93. **Aufg. Für eine Cylinderfläche iſt die Leitende (vw, v′w′) und die Richtung (mn, m′n′) der Erzeugenden gegeben. Man ſoll eine beliebige Mantellinie projiciren.**

Aufl. Irgend eine mit mn Parallele abc, welche die H-Projection der Leitenden ſchneidet, kann als H-Projection einer Mantellinie gelten. Die Puncte b, c ſind die H-Projectionen der Puncte B, C, in denen die Leitende von der durch abc gehenden projicirenden Ebene geſchnitten wird; die zugehörigen V-Projectionen b′, c′ findet man durch Senkrechte zum Grundſchnitt, und die mit m′n′ parallel durch b′ und c′ gelegten Geraden ſind die V-Projectionen zweier Mantellinien, denen die gemeinſchaftliche H-Projection ac entſpricht.

Zieht man zuerſt (parallel mit m′n′) beliebig die V-Projection a′b′ einer Mantellinie, ſo ergeben ſich für dieſe ebenfalls zwei H-Projectionen; denn zu dem in b′ projicirten Puncte der Leitenden gehört als H-Projection ſowohl der Punct b_0 als der Punct b.

Zuſ. I. Wenn (bei anderer als der in Fig. 93 angenommenen Geſtalt der Leitenden) die Projection einer Mantellinie die gleichnamige Projection der Leitenden in n Puncten ſchneidet, ſo kann die zweite Projection dieſer Mantel-

linie n verſchiedene Lagen haben, d. h. eine mit der Erzeugenden parallele projicirende Ebene ſchneidet die Cylinderfläche nach n Mantellinien.

Zuſ. II. Wenn die H-Projectionen zweier Mantellinien die H-Projection der Leitenden berühren (wie in Fig. 93 die Linien rs, tu), ſo geben ſie die Grenzen ab, innerhalb welcher die H-Projectionen aller übrigen Mantellinien liegen müſſen, und bilden den horizontalen Umriß der Cylinderfläche. Eben ſo wäre der verticale Umriß der Fläche das mit m′n′ parallele Tangentenpaar an der V-Projection der Leitenden, wenn dieſe Projection eine krumme Linie wäre; da ſie aber in Fig. 93 eine begrenzte Gerade iſt, ſo gehen die Linien v′y′, w′x′ des verticalen Umriſſes durch ihre Endpuncte.

Gehört die eine Projection einer Mantellinie dem Umriß an, ſo kann es zu ihr nur eine zweite Projection geben.

Man ſieht, daß, wenn die Leitende eine nichtgeſchloſſene Curve iſt, es entweder gar keinen Umriß oder nur einen einſeitigen giebt.

Zuſ. III. Die Puncte r, t, in denen der horizontale Umriß die H-Projection der Leitenden berührt, ſcheiden in Beziehung auf die HE den ſichtbaren Theil der Leitenden vom unſichtbaren, und zwar iſt hier der Theil rvt der unſichtbare, weil (wie die Lage von v′w′ zeigt) der Punct V tiefer liegt als der Punct W. Demnach ſind die H-Projectionen aller jener Mantellinien, welche das Stück RVT der Leitenden ſchneiden, punctirt zu zeichnen. In Beziehung auf die VE iſt das Stück WTV der Leitenden ſichtbar, das Stück WRV unſichtbar. Die V-Projection einer Mantellinie wird daher punctirt gezeichnet, wenn der Schnitt ihrer H-Projection und der H-Projection der Leitenden auf den Bogen wrv fällt. Fig. 93.

§. 217.

Aufg. Eine Cylinderfläche iſt durch die Leitende (vw, v′w′) und die Richtung (mn, m′n′) der Erzeugenden gegeben. Man ſoll die zweite Fig. 93.

Digitized by Google

Projection eines Punctes A der Fläche finden, deſſen eine Projection bekannt iſt.

Aufl. Man zeichne die Projectionen der durch A gehenden Mantellinie (§. 216) und beſtimme die verlangte zweite Projection nach §. 41.

Iſt z. B. die H-Projection a gegeben, ſo zieht man zuerſt abc || mn, ſucht die zugehörigen V-Projectionen a′b′, a″c′, und gelangt ſo zu den Puncten a′ und a″, in deren jeden ſich der Punct A auf der VE projiciren kann.

Iſt die V-Projection a′ gegeben, ſo findet man mittels der Linie a′b′ die Linien ab, a_0b_0 (vgl. §. 216) und mit deren Hülfe die Puncte a, a_0.

Zuſ. Trifft die durch a (oder a′) gelegte Projection der Mantellinie die gleichnamige Projection der Leitenden in n Puncten, ſo läßt die Aufgabe n Löſungen zu. Gar keine Löſung giebt es, wenn die gegebene Projection des Punctes außerhalb des gleichnamigen Umriſſes liegt; **eine**, wenn ſie auf den Umriß fällt.

§. 218.

Aufg. **Die Spuren einer Cylinderfläche zu zeichnen, wenn die Leitende und die Richtung der Erzeugenden gegeben ſind.**

Fig. 93. Aufl. Man projicire eine hinreichende Anzahl Mantellinien (§. 216), beſtimme für jede einzelne beide Spuren (§. 31) und lege immer durch die gleichnamigen Spuren eine ſtetige Curve.

Zuſ. Die Spur einer Cylinderfläche iſt eine Parallel-Projection der Leitenden.

Kegelflächen.

§. 219.

Eine Kegelfläche iſt der geometriſche Ort einer Geraden, welche durch einen gegebenen Punct geht und eine gegebene Curve ſchneidet, welche, wenn ſie **eben** iſt, in ihrer Ebene nicht zugleich den gegebenen Punct enthalten darf.

Digitized by Google

Der feſte Punct heißt der **Mittelpunct** oder die **Spitze** der Kegelfläche, die gegebene Curve die **Leitende**, die veränderliche Gerade die **Erzeugende** und jede ihrer einzelnen Lagen eine **Mantellinie**.

Jede vollſtändige Kegelfläche beſteht aus zwei congruenten Mänteln, welche in der Spitze zuſammenhängen.

Eine Kegelfläche iſt die Grenze für eine pyramidal gebrochene Fläche, deren Seiten bei wachſender Anzahl immer kleinere Kantenwinkel erhalten. Da nun parallele Schnitte einer pyramidalgebrochenen Fläche ähnliche Polygone ſind, ſo müſſen auch die Curven, welche durch parallele Schnitte einer Kegelfläche zum Vorſchein kommen, **ähnliche** Curven ſein (vgl. §. 177).

Eine Kegelfläche iſt gegeben durch die Projectionen ihrer Leitenden und ihrer Spitze.

Für eine und dieſelbe Kegelfläche giebt es unendlich viele Leitende, indem jede Linie, welche alle Mantellinien ſchneidet, für eine Leitende genommen werden kann.

§. 220.

Aufg. Eine beliebige Mantellinie einer Kegelfläche zu projiciren, wenn deren Spitze (m, m′) und Leitende (vw, v′w′) gegeben ſind.

Aufl. Lege durch m eine beliebige Gerade, welche die vw in b, c ſchneidet, beſtimme die zu b, c gehörigen V-Projectionen b′, c′ und ziehe m′b′, m′c′, ſo ſind (mb, m′b′), (mc, m′c′) zwei Mantellinien. Fig. 94.

Würde die vw (bei anderer Geſtalt) von der mbc nicht gerade in zwei, ſondern in n Puncten geſchnitten, ſo würde die durch mcb geführte projicirende Ebene mit der Kegelfläche n Mantellinien gemein haben.

Zuſ. 1. Auch hier bilden die äußerſten Lagen der projicirten Erzeugenden die **Umriſſe** der Fläche. Dieſe äußerſten Lagen ſind nämlich je zwei Gerade, welche von der Projection der Spitze auslaufen und die gleichnamige Projection der Leitenden berühren, wenn die Projection eine

Curve iſt — oder durch ihre Endpuncte gehen, wenn ſie eine Gerade iſt.

Zuſ. II. Was in §. 216, Zuſ. III für die Cylinderfläche in Betreff des Sichtbarſeins einzelner Theile geſagt iſt, gilt auch hier. Doch iſt hiezu noch zu bemerken, daß jede Mantellinie, welche unterhalb der Spitze M unſichtbar war, oberhalb derſelben ſichtbar wird, und umgekehrt. Nur die Umriſſe ſind ihrer ganzen Länge nach voll auszuziehen.

§. 221.

Aufg. Zu der einen Projection (a oder a') eines auf einer gegebenen Kegelfläche liegenden Punctes die zweite Projection zu finden.

Fig. 94. Aufl. ganz ähnlich, wie in §. 217.

§. 222.

Aufg. Die Spuren einer gegebenen Kegelfläche zu zeichnen.

Fig. 94. Aufl. wie in §. 218.

Zuſ. I. Die Spur einer Kegelfläche iſt die Centralprojection der Leitenden auf die Grundebene, wenn die Spitze M als Projectionscentrum gilt.

Legt man an die Leitende durch einen beliebigen Punct P derſelben eine Tangente, und durch dieſe und M eine Ebene, ſo iſt die Spur dieſer Ebene die Centralprojection der Tangente und muß die Kegelſpur (die Centralprojection der Leitenden) in der Spur der Mantellinie MP (nämlich in der Centralprojection von P) berühren. Dieſer Satz wird ganz ähnlich bewieſen, wie er in §. 195 für Orthogonal-Projectionen bewieſen wurde.

Zuſ. II. Die Spur einer Kegelfläche kann eine nicht-geſchloſſene Curve ſein, wenn gleich die Leitende eine geſchloſſene Curve iſt. Legt man nämlich durch die Spitze M der Kegelfläche eine Ebene E parallel zur Grundebene, und es fällt ein Punct U der Leitenden in dieſe Ebene, ſo iſt die durch ihn gehende Mantellinie MU der Grundebene parallel und hat keine wirkliche Spur; indem aber die Spur

einer Mantellinie, welche in der Nähe der MU liegt, in ſehr große Entfernung von m fällt, und zwar in immer größere, je näher die Mantellinie an MU kommt, ſo ſagt man, die Spur der MU liege in unendlicher Entfernung. Die bewegliche Erzeugende des Kegels kann ſich der MU von zwei entgegengeſetzten Seiten nähern; daher wird die Spur der Kegelfläche zwei in's Unendliche fortlaufende Zweige haben.

Schneidet jene durch M gehende und zur Grundebene parallele Ebene E die Leitende in zwei Puncten U_1, U_2, ſo fallen die Spuren der beiden Mantellinien MU_1, MU_2 (d. i. die Centralprojectionen von U_1 und U_2) in unendliche Entfernung von m; dem Bogen der Leitenden, welcher oberhalb der Ebene E liegt, entſpricht als Centralprojection ein Curvenaſt mit zwei unendlichen Zweigen; dem Bogen unterhalb E ein zweiter Curvenaſt, der ebenfalls zwei unendliche Zweige hat. Die Centralprojectionen der beiden Tangenten, welche an die Leitende durch die Puncte U_1 und U_2 gelegt ſind, berühren (nach Zuſ. I) die Spur der Kegelfläche, aber erſt in unendlichen Entfernungen (nämlich in den unendlich fernen Centralprojectionen von U_1 und U_2), d. h. ſie ſind Aſymptoten (vgl. §. 180) der beiden Äſte, aus denen die Kegelſpur beſteht.

Auf ähnliche Weiſe überzeugt man ſich, daß allgemein, wenn die geſchloſſene Leitende von der Ebene E in n Puncten geſchnitten wird, die Spur der Kegelfläche n unendliche Äſte und n Aſymptoten hat. Iſt $n = 1$ (d. h. geht man auf den zuerſt betrachteten Fall zurück), und der in die Ebene E fallende Punct U der (geſchloſſenen) Leitenden iſt kein beſonderer Punct (vgl. §§. 183, 184) der letztern, ſo wird die durch U gehende Tangente ganz in die Ebene E fallen und alſo keine Centralprojection haben; in dieſem Falle giebt es demnach für die unendlichen Zweige der Kegelſpur keine Aſymptote.

(Wie verhält ſich's, wenn U ein Doppelpunct iſt? und wie, wenn U ein Rückkehrpunct iſt?)

Digitized by Google

Zuſ. III. Die Spur einer Kegelfläche kann eine geſchloſſene Curve ſein, wenn gleich die Leitende nicht geſchloſſen iſt. Um dieß einzuſehen, ſtelle man ſich einen Fall vor, wo die Kegelfläche eine **ebene** geſchloſſene Leitende und eine nichtgeſchloſſene Spur hat, vertauſche dann das Grundſyſtem mit einem andern, deſſen eine Grundebene durch die Leitende geht, und betrachte die Curve, welche vorhin als Spur erſchien, als neue Leitende; dadurch iſt offenbar die erſte Leitende zur **Spur** geworden, und man hat eine Kegelfläche mit nichtgeſchloſſener Leitenden aber geſchloſſener Spur vor ſich.

Hieraus iſt zu erſehen, daß eine Kegelfläche auch in ſolchen Fällen in ſich ſelbſt zurückkehren kann, wo die Leitende eine nicht geſchloſſene Curve iſt.

Drehungsflächen.

§. 223.

Denkt man eine gerade oder krumme Linie L auf irgend eine Weiſe in feſter Verbindung mit einer Geraden A, und dreht dieſes Syſtem zweier Linien um die Gerade A, ſo beſchreibt L eine krumme Fläche, welche den Namen **Drehungsfläche** (Revolutionsfläche, Rotationsfläche) erhält. Die Gerade A heißt die **Drehungsaxe**, die Linie L die **Erzeugende** der Fläche. Der Schnitt, den eine durch die Drehungsaxe geführte Ebene auf der Fläche hervorbringt, wird ein **Meridian** der Fläche genannt.

Als Drehungsfläche läßt ſich die krumme Oberfläche des geraden Kegels und geraden Cylinders der Elementargeometrie betrachten; denn erſtere entſteht durch Drehung eines Winkels um einen ſeiner Schenkel, letztere durch Drehung eines Rechtecks um die eine Seite (wobei die gegenüberliegende ohne Ende verlängert zu denken iſt) oder auch durch Drehung einer Schraubenlinie um ihre Axe (vgl. Anmerk. zu §. 209). So auch die Kugelfläche, welche durch Drehung eines Halbkreiſes um ſeinen Durchmeſſer erzeugt wird. Um noch mehr Beiſpiele ſolcher Flächen vor Augen zu haben, drehe man

einen Kreis um eine ſeiner Sehnen; oder um ſeine Tangente; oder um eine Gerade, welche in ſeiner Ebene liegt, ohne ihn zu treffen. Im letztern Falle heißt die erzeugte (ringartige) Fläche ein Wulſt. Eine verwandte Fläche entſteht, wenn man die Drehungsaxe außerhalb der Ebene des Kreiſes annimmt (doch nicht ſenkrecht zu ihr).

§. 224.

Eine zuerſt in die Augen ſpringende Eigenſchaft der Drehungsflächen iſt die, daß jeder Punct der Erzeugenden, während der Drehung einen Kreis beſchreibt, deſſen Mittelpunct auf der Drehungsaxe liegt und deſſen Halbmeſſer der Abſtand des Punctes von der Drehungsaxe iſt. Die Ebene dieſes Kreiſes iſt ſenkrecht auf der Drehungsaxe, woraus umgekehrt folgt, daß jede zur Drehungsaxe ſenkrechte Ebene die Drehungsfläche nach einem Kreiſe ſchneidet (oder auch nach mehreren concentriſchen Kreiſen). Jeder ſolche Kreis heißt ein Parallelkreis.

Iſt die krumme Fläche von der Beſchaffenheit, daß ſie durch die Ebene eines Parallelkreiſes in zwei congruente Hälften geſchieden werden kann, ſo erhält dieſer Parallelkreis den Namen Äquator. In die Äquatorial-Ebene einer Fläche können auch mehrere Parallelkreiſe fallen, wie z. B. beim Wulſt, wo es einen äußern und innern Äquatorial-Kreis giebt.

Wenn die Erzeugende der krummen Fläche in einer Ebene liegt, welche zugleich die Drehungsaxe enthält, ſo ſtellt ſie offenbar in jeder ihrer Lagen zugleich einen Meridian der erzeugten Fläche vor, oder doch wenigſtens die Hälfte des Meridianſchnitts. Daraus folgt ſogleich, daß in dieſem Falle alle Meridiane congruent ſein müſſen. Dasſelbe gilt aber auch für jeden andern Fall. Iſt z. B. die Erzeugende eine gewundene Curve, ſo ſetze man in derſelben eine Anzahl Puncte feſt und ſtelle ſich die von dieſen Puncten beſchriebenen Parallelkreiſe vor. Führt man nun irgend zwei Ebenen durch die Drehungsaxe, ſo ſchneidet jede derſelben die verſchiedenen Parallelkreiſe in Puncten, welche

einem Meridiane angehören. In jedem einzelnen Parallelkreiſe mißt der Bogen zwiſchen beiden Meridian-Ebenen den Neigungswinkel derſelben; wenn daher dieſer Bogen in dem einen Parallelkreiſe Null wird, ſo iſt er zugleich in allen andern Parallelkreiſen Null, d. h. wenn die eine Meridian-Ebene ſo weit gedreht wird, daß ein Punct der Meridiancurve in den auf demſelben Parallelkreiſe liegenden Punct der andern Meridiancurve fällt, ſo fallen beide Meridiancurven ſelbſt ganz zuſammen, ſind alſo vollkommen congruent.

Daher kann in jeder Drehungsfläche der Meridian als eine neue Erzeugende gelten. Überhaupt kann man, wie leicht einzuſehen, irgend eine auf der Drehungsfläche gezogene Linie, welche alle Parallelkreiſe ſchneidet, an die Stelle der urſprünglichen Erzeugenden ſetzen; oder es läßt jede Drehungsfläche unendlich viele Erzeugende zu.

§. 225.

Für die graphiſche Darſtellung einer Drehungsfläche iſt es am zweckmäßigſten, die HE ſenkrecht zur Drehungsaxe zu legen, ſo daß die H-Spur der letztern zugleich ihre H-Projection iſt. Daraus fließen folgende Vortheile: 1.) jeder Parallelkeis hat zur H-Projection einen Kreis, deſſen Mittelpunct in die Spur der Drehungsaxe fällt und deſſen Halbmeſſer dem Halbmeſſer des wahren Parallelkreiſes gleich iſt; 2.) die V-Projection jedes Parallelkreiſes iſt eine zum Grundſchnitt parallele Gerade, welche an Länge dem Durchmeſſer des Parallelkreiſes gleichkommt und von der V-Projection der Drehungsaxe ſenkrecht halbirt wird; 3.) die H-Projection jedes Meridians giebt eine Gerade, welche durch die H-Spur der Drehungsaxe geht. In den nachfolgenden Beiſpielen (§§. 226—231) wird dieſe Wahl des Grundſyſtems immer beobachtet werden.

Derjenige Meridian, welcher parallel zur VE iſt und ſich alſo auf letzterer unverändert projicirt, heißt der Hauptmeridian, und ſeine V-Projection iſt zugleich der verticale Umriß der Fläche. Den horizontalen Umriß

Digitized by Google

erhält man als Projection des größten Parallelkreiſes. Erſtreckt ſich die Drehungsfläche in's Unendliche, ſo kann es keinen größten Parallelkreis, alſo auch keinen horizontalen Umriß geben.

§. 226.

Aufg. Eine Drehungsfläche hat (o, o′o″) zur Are und (vuw, v′u′w′) zur Erzeugenden. Man ſoll für einen Punct der Fläche, deſſen eine Projection gegeben iſt, den Parallelkreis projiciren. Fig. 95. 96.

Aufl. Iſt die H-Projection a des Punctes gegeben, ſo findet man zuerſt die H-Projection des Parallelkreiſes als einen mit oa um o beſchriebenen Kreis. Dieſer ſchneidet die vuw in einem Puncte b, zu welchem man als V-Projection den Punct b′ erhält. Die V-Projection des Parallelkreiſes fällt in die durch b′ gehende Parallele mit dem Grundſchnitt.

Iſt die V-Projection a′ gegeben, ſo zieht man durch ſie eine Parallele zum Grundſchnitt, ſucht die zu b′ gehörige H-Projection b, beſchreibt mit ob einen Kreis um o und beſtimmt die Grenzen für die V-Projection des Parallelkreiſes mittels der Größe ob.

Zuſ. Sind im erſtern Falle zu b mehrere V-Projectionen möglich, ſo giebt es mehrere Parallelkreiſe, welche einerlei H-Projection haben.

Können im zweiten Falle zu b′ mehrere H-Projectionen gehören, ſo ſchneidet eine zur Drehungsare ſenkrechte Ebene die Drehungsfläche in mehreren concentriſchen Parallelkreiſen.

§. 227.

Aufg. Zu der einen Projection eines auf einer gegebenen Drehungsfläche liegenden Punctes die zweite Projection zu finden.

Digitized by Google

Aufl. Projicire den durch den Punct gehenden Parallelkreis (§. 226) und beſtimme die zweite Projection mittels einer Senkrechten zum Grundſchnitt.

Zuſ. Aus §. 226, Zuſ. folgt, daß man zur gegebenen Projection zuweilen mehrere zweite Projectionen finden kann, oder daß mehrere Puncte der Fläche eine gemeinſchaftliche Projection haben können.

§. 228.

Aufg. Die Axe einer Drehungsfläche iſt Fig. 96. (o,o′o″), die Erzeugende (vuw, v′u′w′); man verlangt die Projectionen derjenigen Lage der Erzeugenden, welche durch den in b projicirten Punct der Fläche geht.

Aufl. Beſchreibt man um o einen Kreis mit ob, welcher die vuw in b ſchneidet, ſo iſt bb die Größe des Bogens, welchen der Punct B der Erzeugenden durchlaufen muß, damit er in die Lage B komme. Um nun zu finden, wohin andere Puncte der Erzeugenden fallen, wenn dieſe die vorgeſchriebene neue Lage eingenommen hat, ziehe man durch o eine beliebige Gerade ovw, und eine zweite ovw ſo, daß arc. I1 = arc. bb, beſchreibe um o Kreiſe, welche die vuw in verſchiedenen Puncten u, t,.. ſchneiden, mache arc. t2 = arc. tII, arc. u3 = arc. uIII,....; dann iſt die ſtetige Curve vtu...w die H-Projection für die neue Lage der Erzeugenden, und ihre V-Projection ergiebt ſich, wenn man die zu v, t, u,... w gehörigen V-Projectionen ſucht (vgl. §. 227) und verbindet.

In beſondern Fällen wird die Auflöſung einfacher. So iſt z. B. in Fig. 96 die H-Projection der Erzeugenden ein Halbkreis, deſſen Durchmeſſer vw durch o geht *); daher

*) Die Erzeugende ſelbſt iſt ein halber Umgang einer Schraubenlinie, deren Axe der Drehungsaxe parallel liegt. Die erzeugte Fläche iſt daher nur als ein Stück einer unendlich ausgedehnten Fläche zu betrachten, deren Erzeugende die voll-

erhält man ihre neue Lage leicht dadurch, daß man die Lage von ovw wie vorhin beſtimmt, ov = ov, ow = ow macht und über vw einen Halbkreis beſchreibt.

Noch einfacher verhält ſich's, wenn die Erzeugende eine **Gerade** iſt, wie in Fig. 97. (S. §. 231.)

§. 229.

Aufg. Den Meridian einer gegebenen Drehungsfläche zu projiciren, welcher durch einen gegebenen Punct derſelben geht.

Aufl. Iſt (o, o′o″) die Drehungsaxe, (vuw, v′u′w′) die Erzeugende, c die H-Projection des Punctes, für welchen der Meridian geſucht werden ſoll, ſo iſt die Gerade oc die H-Projection des letztern. Sucht man für verſchiedene Puncte in dieſer Geraden die zugehörigen V-Projectionen (§. 227) und verbindet ſie ſtetig, ſo hat man auch die V-Projection des Meridians. Fig. 96.

§. 230.

Aufg. Den verticalen Umriß einer Drehungsfläche zu zeichnen, deren Axe und Erzeugende gegeben ſind.

Aufl. Dieſe Aufgabe iſt nur ein beſonderer Fall der vorigen, indem der verticale Umriß die V-Projection des **Hauptmeridians** iſt; die H-Projection des Hauptmeridians iſt aber parallel zum Grundſchnitt.

Zuſ. Kennt man die V-Projectionen für eine Reihe von Lagen der Erzeugenden, ſo iſt der verticale Umriß die **Umhüllungscurve** der letztern (vgl. §. 187).

§. 231.

Zum Schluſſe dieſer allgemeinen Betrachtungen über Drehungsflächen ſoll noch diejenige Fläche etwas näher unterſucht werden, deren Erzeugende eine Gerade iſt, welche

ſtändige Schraubenlinie iſt; und welche in unendlich viele ſolche (unter ſich congruente) Stücke zerlegt werden kann.

mit der Drehungsaxe nicht in einerlei Ebene liegt. Dieſe Fläche gehört — wie ſich ſpäter (§. 234) zeigen wird — zu denjenigen Flächen, welche man Hyperboloide nennt, weil ſie mit Hülfe einer Hyperbel erzeugt werden können.

Fig. 97. Die Erzeugende und die Drehungsaxe (o, o′o″) denke man ſich durch eine Gerade OT verbunden, welche beide ſenkrecht ſchneidet. Da dieſe die kürzeſte Entfernung zwiſchen beiden Linien angibt, ſo iſt ſie der Halbmeſſer des kleinſten Parallelkreiſes. Iſt die Erzeugende in einer zur VE parallelen Lage (Vw, v′w′) gegeben, ſo iſt die V-Projection jener kürzeſten Entfernung der Punct o′; die H-Projection iſt die auf Vw ſenkrechte ot, und die H-Projection des kleinſten Parallelkreiſes iſt der mit ot um o beſchriebene Kreis. Dieſer kleinſte Parallelkreis iſt der Äquator der Fläche; denn zwei Ebenen, die man oberhalb und unterhalb des Punctes (o, o′) in einerlei Abſtand von ihm annimmt, ſchneiden die Fläche in gleichen Parallelkreiſen, was ſich folgendermaßen beweiſen läßt. Liegt o′ in der Mitte der Parallelen v′m′, w′n′, welche die Richtungen für die V-Projectionen zweier Parallelkreiſe VM, WN vorſtellen, ſo iſt o′v′ = o′w′, alſo auch tV = tw und oV = ow; die mit oV und ow beſchriebenen Kreiſe fallen demnach in einen zuſammen, oder die von den Puncten (V, v′) und (w, w′) erzeugten Parallelkreiſe VM und WN haben einerlei H-Projection, ſind folglich gleich.

Die H-Projection ktl des Äquators kann als ein innerer horizontaler Umriß des Hyperboloids angeſehen werden; ein äußerer iſt wegen der unendlichen Ausdehnung der Fläche nicht möglich.

Während ſich die Erzeugende (ſammt der Linie OT) um die Axe (o, o′o″) dreht, bleibt die Projection des rechten Winkels VTO immer ein rechter Winkel, indem der Schenkel OT immer parallel zur HE bleibt; daher wird die H-Projection des Äquators von den H-Projectionen aller möglichen Lagen der Erzeugenden berührt. Jede Lage der Erzeugenden heißt eine Mantellinie.

Digitized by Google

Der mit oV um o beſchriebene Kreis iſt die H-Spur oder der Grundkreis des Hyperboloids und zugleich die H-Projection des Parallelkreiſes WN, welcher der Deckkreis heißen mag. *) Betrachtet man nun den Punct S als die H-Spur irgend einer Lage der Erzeugenden oder einer Mantellinie, ſo erhält man die H-Projection dieſer Mantellinie, wenn man eine Tangente an die H-Projection des Äquators zieht. Von S aus ſind aber an dieſen Kreis zwei Tangenten möglich, und nur eine derſelben iſt brauchbar, diejenige nämlich (Sr), welche auf der H-Projection des Deckkreiſes vom Puncte w aus einen dem Bogen VS gleichen Bogen wr abſchneidet; denn es iſt klar, daß der Punct V im Grundkreiſe und der Punct W im Deckkreiſe immer gleiche Bögen gleichzeitig zurücklegen. (Wenn daher der Punct S bis in den Punct w fortrückt, ſo kann Sr nicht mit wV zuſammenfallen, ſondern nimmt die Lage der zweiten Tangente ein, welche man von w aus noch außer der wV an den Kreis ktl ziehen kann). Die zu Sr gehörige V-Projection s′r′ iſt leicht anzugeben, indem die V-Projection von S in den Grundſchnitt und die V-Projection von R in w′n′ fallen muß.

Da (wie eben bemerkt) arc. wr = arc. VS, ſo läßt ſich Sr ziehen, wenn auch die H-Projection ktl des Äquators nicht gezeichnet iſt; man darf nur von V und w aus auf dem Grundkreiſe zwei gleiche Bögen nach einerlei Richtung hin abſchneiden und die Endpuncte S, r dieſer Bögen verbinden. Giebt man dieſen beiden gleichen Bögen nach und nach immer größere Werthe, und ſucht zu den verſchiedenen Lagen der Verbindungslinie Sr die entſprechenden V-Projectionen, ſo gewährt der Inbegriff der auf dieſe Weiſe projicirten Mantellinien ein Bild des Hyperboloids ſelbſt (ſ. Fig. 98).

---

*) Das zwiſchen Grund- und Deckkreis enthaltene Stück der Erzeugenden bleibt während ihrer Bewegung von conſtanter Größe, da die Erzeugende gegen die parallelen Ebenen dieſer Kreiſe immer dieſelbe Neigung behält.

Eben ſo bleibt jedes andere, zwiſchen beliebigen Parallelkreiſen genommene Stück der Erzeugenden conſtant.

Digitized by Google

Kann man die Lage der Erzeugenden beliebig wählen, ſo erhält man eine gefällige Figur dadurch, daß man zuerſt den Grundkreis beſchreibt, ihn in gleiche Theile theilt und die Verbindungslinie irgend zweier Theilpuncte als die H-Projection der Erzeugenden betrachtet. Eine ſolche Annahme liegt der Fig. 98 zu Grunde, deren Entſtehung wohl keiner weitern Erläuterung bedarf. Dabei ergiebt ſich die H-Projection des Äquators als Umhüllungscurve für die H-Projectionen und der verticale Umriß als Umhüllungscurve für die V-Projectionen der Mantellinien.

§. 232.

Fig. 97. Die Lage VW der Erzeugenden kann von irgend einer andern Lage niemals geſchnitten werden. Denn wäre dieß z. B. für die Lage SR der Fall, ſo müßten die beiden Puncte q′, q″, in denen die v′w′ und r′s′ von der aus q auf den Grundſchnitt gefällten Senkrechten getroffen werden, in einen Punct q′ zuſammenfallen; dann wäre aber

$$w'q' : q'v' = r'q' : q's'$$

und mithin auch $wq : qV = rq : qS$

oder $wq : rq = qV : qS$

Nun iſt aber (nach einer bekannten Eigenſchaft des Kreiſes)

$$wq : rq = qS : qV$$

und wenn dieſe Proportion mit der vorigen zugleich ſollte beſtehen können, müßte $qS = qV$ und (wegen $qS = qw$) auch $qw = qV$ ſein, d. h. es müßte q in t fallen, was nicht möglich iſt, weil ſonſt Sr entweder ganz in Vw fallen, oder den Kreis, an welchem ſie Tangente ſein ſoll, ſchneiden würde. — Eben ſo wird der Beweis geführt, wenn der Schnittpunct q außerhalb des Grundkreiſes VB liegt.

Der Lage VW der Erzeugenden kann aber auch keine andere Lage parallel ſein; denn in der Regel ſchneidet die Vw die H-Projection einer andern Lage; und für den einzigen Fall, wo dieß nicht ſtatt findet, ſchneiden ſich die V-Projectionen; ſtellt nämlich die mit Vw parallele Sr die H-Projection für eine Lage der Erzeugenden vor, ſo liegt die Spur derſelben nicht in r, ſondern in S, daher nimmt die zuge-

Digitized by Google

hörige V-Projection die Lage m′n′ an, welche die v′w′ nothwendig ſchneiden muß.

Es iſt demnach erwieſen, daß keine Lage der Erzeugenden mit der Lage VW in einerlei Ebene fallen kann. Nimmt man nun ſtatt der Lage VW irgend eine andere, ſo dürfte man nur die VE parallel zu dieſer neuen Lage annehmen, um wieder den vorigen Fall zu haben, ſo daß man ſieht, es gelte der allgemeine Satz: irgend zwei Lagen der Erzeugenden fallen niemals in einerlei Ebene.

Eine Gerade MN, deren H-Spur M in die H-Projection w fällt und deren Schnitt N mit dem Deckkreiſe ſich in V projicirt (welche alſo, wie in §. 231 gezeigt wurde, keine Lage der urſprünglichen Erzeugenden ſein kann), muß die VW ſchneiden und zwar im Puncte T; denn es iſt leicht zu beweiſen, daß die V-Projection m′n′ dieſer Geraden durch t′ geht. Ihre H-Neigung iſt der H-Neigung der VW gleich ($\angle n'm'v' = \angle w'v'm'$). Dieſe nämliche Gerade MN muß aber auch alle möglichen andern Lagen der Erzeugenden ſchneiden. Denn iſt (Sr, s′r′) eine beliebige Lage, und q″ der Punct, in welchem ihre V-Projection r′s′ von der auf dem Grundſchnitt ſenkrechten qq″ geſchnitten wird, ſo iſt

$$r'q'' : q''s' = rq : qS$$
$$= Vq : qw \text{ (wegen } rq = Vq \text{ und } Sq = qw).$$

Legt man durch m′ und q″ eine Gerade und verlängert ſie bis an die V-Projection a″b″ des Deckkreiſes, ſo verhalten ſich die zwei Stücke, in welche dieſe Gerade durch die r′s′ zerlegt wird, $= r'q'' : q''s' = Vq : qw$; daraus folgt, daß der Punct, in welchem die Gerade die a″b″ trifft, kein anderer ſein kann als der Punct n′, und daß alſo die beiden Linien SR, MN ſich ſchneiden, indem ihre Projectionen die Bedingung des §. 23 erfüllen. — Ganz ähnlich fällt der Beweis aus, wenn die Mn von der H-Projection irgend einer Lage der Erzeugenden außerhalb des Grundkreiſes VB getroffen wird. — Hat aber die Projection eine zu Mn

Digitized by Google

parallele Lage Sr, ſo ſieht man leicht, daß die zugehörige V-Projection in m'n' fallen muß und daß demnach hier die Linien SR und MN parallel ſind oder ſich in einem unendlich entfernten Puncte ſchneiden.

Die Linie MN muß, da ſie alle Mantellinien trifft, ganz auf dem Hyperboloide liegen. Denkt man ſich die MN in feſter Verbindung mit den Linien VW und OT, ſo wird ſie mit der VW zugleich fortrücken und in jeder neuen Lage wird ſie wieder alle Mantellinien ſchneiden, weil man nur die VE parallel mit der entſprechenden neuen Lage von VW annehmen darf, um wieder ganz den eben betrachteten Fall zu haben. Während der Bewegung der Erzeugenden VW bleibt alſo die mit ihr verbundene MN fortwährend auf dem Hyperboloide und kann demnach für eine zweite Erzeugende desſelben angeſehen werden; ihre verſchiedenen Lagen geben ein zweites Syſtem von Mantellinien.

Die in dieſem § gefundenen Reſultate laſſen ſich wie folgt zuſammenfaſſen: Auf dem Hyperboloide ſind zwei Syſteme von Geraden möglich; die Geraden beider Syſteme haben einerlei Neigung gegen die Ebene des Äquators. Je zwei Gerade eines und desſelben Syſtems können nie in einerlei Ebene liegen; dagegen ſchneidet jede Gerade des einen Syſtems alle Geraden des andern (weniger einer, mit welcher ſie parallel läuft). Durch jeden Punct des Hyperboloids kann man eine Gerade des einen Syſtems und eine Gerade des andern Syſtems ziehen.

§. 233.

Soll zu einem auf dem Hyperboloide liegenden Puncte, deſſen H-Projection q iſt, die V-Projection geſucht werden, ſo kann man an die Stelle des in §. 227 angegebenen Verfahrens auch das folgende ſetzen.

Fig. 97. Man zeichne die H-Spur (den Grundkreis VSM) des Hyperboloids und die H-Projection ktl des Äquators; an letztere ziehe man von q aus eine Tangente rqS; dieſe Tan-

gente ſtellt die H-Projection zweier (zu verſchiedenen Syſtemen gehörigen) Mantellinien vor, welche in S und r ihre H-Spuren haben und den Deckkreis in zwei Puncten ſchneiden, deren H-Projectionen in die Puncte S und r fallen. Die V-Projectionen s′r′, σ′ϱ′ dieſer Mantellinien (welche ſich bei richtiger Zeichnung auf k′l′ ſchneiden müſſen) werden von einer aus q auf den Grundſchnitt gefällten Senkrechten in den Puncten q′ und q″ getroffen, von denen jeder als die zu q gehörige V-Projection des Flächenpunctes gelten kann.

Von q aus iſt an den Kreis ktl noch eine zweite Tangente Vqw möglich, auf welche ſich das für Sqr beobachtete Verfahren ebenfalls anwenden läßt; durch Benützung dieſer zweiten Tangente muß man aber offenbar wieder auf die vorigen Puncte q′, q″ kommen.

§. 234.

Zeichnet man nach §. 230 den verticalen Umriß des Hyperboloids, ſo erhält man eine Curve, welche aus vier congruenten unendlichen Zweigen k′a′..., k′a″..., l′b′..., l′b″... beſteht. Die beiden Geraden m′n′, v′w′ (welche ſtets innerhalb der Curve liegen müſſen, da tV < oA oder o″v′ < o″a′) ſind Aſymptoten derſelben. Denn die kürzeſte Entfernung des Punctes a′ von v′w′ iſt < a′v′, und das Stück a′v′ ſelbſt wird um ſo kleiner, in je größere Entfernung von (o, o′) man die HE verlegt. Um Letzteres einzuſehen, bemerke man, daß Fig. 97.

$$a'v' = Az = Ao - zo = Ao - \sqrt{Ao^2 - ot^2}$$
$$= Ao - Ao\sqrt{1 - \frac{ot^2}{Ao^2}}$$

und daß, je größer der Abſtand t′o″ der HE von (o, o′) angenommen, um ſo größer auch Ao wird, während ot immer von conſtanter Größe bleibt; bei fortgeſetztem Wachſen von Ao nähert ſich der Bruch $\frac{ot^2}{Ao^2}$ immer mehr der Grenze Null, alſo der Ausdruck Ao $\sqrt{1-\frac{ot^2}{Ao^2}}$ für zo mehr und mehr der

Digitized by Google

Grenze Ao, oder es wird der Unterſchied zwiſchen Ao und zo (d. i. der Werth von a′v′) immer kleiner, und um ſo mehr verkleinert ſich die Entfernung des Punctes a′ von v′w′; dasſelbe gilt für den Punct b″, und in Beziehung auf m′n′ auch für die Puncte a″, b′ (da b′m′ = b″w′ = a″n′ = a′v′), woraus folgt, daß die Zweige der Curve ſich den Geraden v′w′, m′n′ um ſo mehr nähern, je weiter ſie fortgeſetzt werden.

Der verticale Umriß ſelbſt (oder die Meridiancurve) iſt eine Hyperbel, was ſich in folgender Art beweiſen läßt.

Sind c, c′ die Projectionen eines im Hauptmeridian beliebig liegenden Punctes C, ſo iſt die Tangente cd des Kreiſes ktl die H-Projection einer durch C gehenden Mantellinie, alſo d′c′ die V-Projection derſelben. In dem rechtwinkeligen Dreieck, welches ſich auf die VE in c′d′e′ projicirt, iſt der Winkel bei D die H-Neigung der Mantellinie, alſo = n′t′k′. Die beiden Katheten dieſes Dreiecks (von denen die eine die Größe ihrer H-Projection cd, die andere die Größe ihrer V-Projection e′c′ hat) verhalten ſich demnach = t′k′ : k′f′ (wo k′f′ ⊥ k′l′), oder es iſt, wenn man den Halbmeſſer des Äquators durch α, das Stück k′f′ durch β, t′e′ durch x und e′c′ durch y bezeichnet:

$$cd : y = \alpha : \beta$$

$$y = \frac{\beta}{\alpha} \cdot cd$$

oder (da $cd^2 = oc^2 - od^2 = x^2 - \alpha^2$)

$$y = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{x^2 - \alpha^2}$$

welche Gleichung in

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

umgeformt werden kann. Dieſe Gleichung zeigt aber, daß c′ auf einer Hyperbel liegt, deren reelle Axe k′l′ und deren imaginäre Axe o″o″ iſt (vgl. §. 192, III). Zugleich beſtätigt ſich, daß die Aſymptoten dieſer Hyperbel keine andern Linien ſein können, als v′w′ und m′n′.

Digitized by Google

Betrachtet man v′w′, m′n′ als die V-Projectionen zweier Linien, welche in der Ebene des Hauptmeridians liegen (deren H-Projectionen alſo in die Linie AoB fallen) und dreht ſie mit dieſer Ebene um die Axe (o, o′o″), ſo beſchreiben ſie einen geraden Kegel, deſſen Mäntel ſich dem durch den Meridian erzeugten Hyperboloid ohne Ende nähern, und welcher der aſymptotiſche Kegel des letztern heißt. Von den genannten Linien iſt die eine den Linien (Vw, v′w″), (rS, v′w′), die andere den Linien (Mn, m′n′), (Sr, m′n″) parallel; und da Ähnliches ſtatt findet, wenn durch Änderung der VE ein beliebiger anderer Meridian zum Hauptmeridian erhoben wird, ſo hat man den Satz: Zu jeder Mantellinie des aſymptotiſchen Kegels laſſen ſich zwei Parallellinien auf dem Mantel des Hyperboloids ziehen; und umgekehrt: zu jeder Mantellinie des Hyperboloids läßt ſich eine Parallele auf dem Mantel des aſymptotiſchen Kegels finden.

Irgend drei zu einerlei Syſtem gehörige Mantellinien des Hyperboloids können nie einer und derſelben Ebene parallel laufen; denn wäre dieß der Fall, ſo müßten drei Mantellinien des aſymptotiſchen Kegels (nämlich diejenigen, welche den erwähnten Mantellinien des Hyperboloids parallel ſind) in einerlei Ebene liegen, und ihre H-Spuren (d. h. drei Puncte der kreisförmigen Kegelſpur) würden dann in gerader Linie liegen, was nicht möglich iſt.

Rückungsflächen.

§. 235.

Wenn eine ebene Curve, ſich ſelbſt congruent oder ähnlich bleibend, ihre Lage ſo ändert, daß ihre Ebene ſtets mit ihrer urſprünglichen Lage parallel bleibt, während ihre Bewegung noch außerdem an irgend ein beſtimmtes Geſetz gebunden iſt, von welchem zugleich die Änderung ihrer Dimenſionen abhängt, ſo beſchreibt die Peripherie eine krumme Fläche, welche man eine Rückungsfläche nennen kann. Die fortrückende Curve heißt die Erzeugende.

Digitized by Google

So läßt ſich z. B. jede Drehungsfläche auch als Rückungsfläche denken, indem ſie durch einen Kreis entſteht, deſſen Mittelpunct in der Drehungsaxe fortſchreitet, während ſeine Ebene ſenkrecht zu dieſer bleibt und ſein Durchmeſſer ſich ſo ändert, daß er ſtets von der Peripherie des Meridians begrenzt wird.

Bleiben zwei Puncte einer conſtanten Erzeugenden in zwei parallelen Geraden, ſo beſchreibt auch jeder andere Punct eine Gerade, welche mit den beiden vorigen parallel läuft, und die Rückungsfläche iſt eine Cylinderfläche.

Iſt die Erzeugende durch n Puncte beſtimmt, ſo kann man als Rückungsfläche eine Kegelfläche erhalten, wenn man irgend n Puncte der (veränderlichen) Erzeugenden in n Geraden fortſchreiten läßt, welche ſich in einem Puncte ſchneiden.

Flächen zweiter Ordnung.

§. 236.

Durch parallele Rückung der Linien zweiter Ordnung kommen diejenigen krummen Flächen zum Vorſchein, welche man Flächen zweiter Ordnung nennt, und deren einzelne Arten hier aufgezählt werden ſollen.

1.) Ein Kegel zweiter Ordnung iſt derjenige, deſſen Leitende eine Linie zweiter Ordnung iſt. *)

2.) Ein Cylinder zweiter Ordnung hat zur Leitenden eine Curve zweiter Ordnung. Es giebt elliptiſche, paraboliſche und hyperboliſche Cylinder.

3.) Ein Ellipſoid entſteht, wenn eine veränderliche Ellipſe ſich ſo bewegt, daß ihre Ebene ſenkrecht auf der einen Axe einer feſten Ellipſe bleibt, die Endpuncte ihrer einen Axe in der Peripherie der feſten Ellipſe fortlaufen und ihre beiden Axen ein gegebenes Verhältniß zu einander behalten. **)

*) Die Fläche eines ſolchen Kegels iſt immer in ſich geſchloſſen, wenn auch die Leitende eine Hyperbel oder Parabel ſein ſollte. (Vgl. §. 222, Zuſ. III.)

**) Die Ellipſe bleibt ſich alſo fortwährend ähnlich. (Vgl. §. 193.)

— Die bewegliche Ellipſe hat ihre größte Ausdehnung, wenn ihr Mittelpunct in den Mittelpunct der feſten Ellipſe fällt.

Geht die bewegliche Ellipſe in einen Kreis über, ſo iſt die erzeugte Fläche ein Drehungs-Ellipſoid, indem ſie durch Drehung einer Ellipſe um eine ihrer Axen entſtehen kann. Iſt zugleich auch die feſte Ellipſe ein Kreis, ſo entſteht als beſonderer Fall des Ellipſoids die Kugel.

4.) Ein Hyperboloid mit **einem** Mantel wird auf dieſelbe Art wie das Ellipſoid erzeugt; man hat blos an die Stelle der feſten Ellipſe eine feſte Hyperbel zu ſetzen, auf deren imaginärer Axe die Ebene der erzeugenden Ellipſe ſenkrecht bleibt. Dabei erhält letztere ihre geringſte Ausdehnung, wenn ihr Mittelpunct in den Mittelpunct der Hyperbel fällt. Iſt die erzeugende Ellipſe ein Kreis, ſo hat man das einmantelige Drehungs-Hyperboloid, welches ſich durch Drehung einer Hyperbel um die imaginäre Axe bilden kann und §§. 231—234 bereits betrachtet wurde.

Läßt man aber die Ebene der erzeugenden Ellipſe auf der Richtung der reellen Hyperbelaxe ſenkrecht bleiben, ſo iſt die erzeugte Fläche

5.) ein Hyperboloid mit **zwei** Mänteln. — Falls die erzeugende Ellipſe ein Kreis iſt, kann die Fläche auch durch Drehung einer Hyperbel um ihre reelle Axe beſchrieben werden.

6.) Ein elliptiſches Paraboloid erhält man auf ähnliche Weiſe wie das Ellipſoid, wenn man die feſte Ellipſe mit einer Parabel vertauſcht. Auch dieſe Fläche kann zu einer Drehungsfläche werden.

Eine nähere Kenntniß dieſes Paraboloids führt auf eine zweite Erzeugungsart deſſelben, welche darin beſteht, daß eine Parabel, deren Ebene ſenkrecht auf der Ebene der feſten Parabel iſt, mit ihrem Scheitel auf der Peripherie der feſten Parabel fortrückt, wobei ihre Axe parallel mit der Axe der letztern iſt und die Axen beider Parabeln ſich nach derſelben Seite zu in's Unendliche erſtrecken.

Digitized by Google

Sind aber die Axen beider Parabeln nach entgegengeſetzten Seiten gerichtet, während die übrigen Bedingungen dieſelben bleiben, ſo beſchreibt die bewegliche Parabel

7.) ein hyperboliſches Paraboloid, welches ſeinen Beinamen daher hat, daß eine zur Axe der feſten Parabel ſenkrechte Ebene es (wie die analytiſche Geometrie beweiſ't) nach einer Hyperbel ſchneidet. Dieſe Fläche kann nie durch Umdrehung entſtehen, weil ſie von einer Ebene nie nach einer geſchloſſenen Curve geſchnitten werden kann.

Bei dem Ellipſoid und den beiden Hyperboloiden heißt der Mittelpunct der feſten Curve der Mittelpunct der Fläche und jede durch ihn gehende Sehne ein Durchmeſſer. In den beiden Paraboloiden (für welche es keine Mittelpuncte giebt) verſteht man unter einem Durchmeſſer irgend eine Gerade, welche mit der Axe der feſten Parabel parallel iſt. Dieſe letztere ſelbſt heißt der Hauptdurchmeſſer oder die Axe des Paraboloids.

Von den vorhin genannten drei Flächen mit Mittelpuncten hat jede drei Hauptdurchmeſſer oder Axen, nämlich die beiden Axen der feſten Curve und eine dritte, welche auf beiden ſenkrecht iſt. Die Axen des Ellipſoids ſind ſämmtlich reell; das Hyperboloid mit einem Mantel hat zwei reelle und eine imaginäre Axe; das Hyperboloid mit zwei Mänteln eine reelle und zwei imaginäre.

Es läßt ſich aus dem Entſtehungsgeſetze der Flächen zweiter Ordnung ziemlich einfach beweiſen, daß der Mittelpunct einer ſolchen Fläche jeden Durchmeſſer halbirt.

Wenn irgend eine krumme Fläche durch eine Ebene ſo zerlegt werden kann, daß jede auf der Ebene ſenkrechte Sehne von dieſer halbirt wird, ſo iſt die Fläche ſymmetriſch und jene Ebene heißt eine Hauptebene oder Ebene der Symmetrie. Man ſieht ſogleich, daß für die Flächen zweiter Ordnung die Ebene der feſten Curve eine Hauptebene ſein müſſe. Von den drei Flächen mit Mittelpuncten hat jede noch zwei andere Hauptebenen, deren jede durch zwei Axen geht. Die Hauptebenen dieſer Flächen ſind alſo aufeinander ſenkrecht. Für die beiden Paraboloide giebt es außer

der zuerſt genannten nur noch eine, welche durch die Axe der feſten Parabel geht und auf der Ebene derſelben ſenkrecht ſteht.

Für eine Fläche, welche durch Drehung entſtehen kann, iſt jede beliebige Meridian-Ebene eine Ebene der Symmetrie.

Nimmt man eine Ellipſe als Leitende oder Baſis einer Kegelfläche und verlegt deren Spitze in eine Gerade, welche aus dem Mittelpuncte der Ellipſe ſenkrecht auf ihrer Ebene errichtet iſt, ſo beſtimmt dieſe Gerade mit den beiden Axen der Ellipſe zwei Hauptebenen.

†) Wird ein Kegel von der eben betrachteten Art parallel mit der Baſis geſchnitten, ſo entſteht eine der Baſis ähnliche Ellipſe (§. 219). Dieſe Ellipſe und die Baſis liegen ſo gegen einander, daß die eine ſich auf die Ebene der andern unverändert projicirt und die Projection der einen mit der andern in der Lage des Mittelpuncts und in den Richtungen der Axen übereinſtimmt. Hieraus kann man umgekehrt ſchließen, daß man durch irgend zwei ähnliche Ellipſen, welche die angegebene Lage gegen einander haben, zwei Kegelflächen führen kann, deren Spitzen auf die Verbindungslinie der Mittelpuncte fallen, und um dieſe Spitzen ſelbſt zu finden, dürfte man nur die Endpuncte der großen oder auch der kleinen Axen verbinden. Insbeſondere wird man alſo durch je zwei Lagen der erzeugenden Ellipſe in den unter 3—6 aufgezählten Flächen zwei Kegel legen können, welche ihre Spitzen in der auf der beweglichen Ellipſenebene ſenkrechten Flächenaxe haben. (Einer dieſer Kegel geht in einen Cylinder über, wenn die beiden Lagen der erzeugenden Ellipſe gleichweit vom Mittelpuncte der Fläche entfernt und alſo congruent ſind).

††) Auf ähnliche Weiſe findet man, daß bei den Flächen 6 und 7 (wenn man für 6 die zweite Erzeugungsart gelten läßt) durch je zwei Lagen der erzeugenden Parabel eine Cylinderfläche gelegt werden kann, deren Mantellinien parallel laufen mit der Verbindungslinie der Scheitel.

§. 237.

Die Theorie der Flächen zweiter Ordnung (welche gewöhnlich in der analytiſchen Geometrie abgehandelt wird) weiſ't unter andern noch folgende Eigenſchaften derſelben nach.

Eine Fläche zweiter Ordnung wird von einer Geraden in höchſtens 2 Puncten getroffen und von jeder Ebene nach einer Linie zweiter Ordnung geſchnitten. Doch kann in einzelnen Fällen dieſe Schnittcurve durch zwei Gerade vertreten werden.

Die Schnitte paralleler Ebenen ſind ähnliche Curven.

Jede Fläche zweiter Ordnung, welche überhaupt nach einer geſchloſſenen Curve geſchnitten werden kann, läßt zwei verſchiedene Syſteme von parallelen Ebenen zu, deren Schnitte Kreiſe geben, und alle dieſe Ebenen ſtehen ſenkrecht auf einer Hauptebene. In dem Falle, wo die Fläche durch Drehung zu erzeugen iſt, fallen dieſe beiden Syſteme zu einem einzigen zuſammen.

Schneidet man eine Fläche zweiter Ordnung durch ein Syſtem paralleler Ebenen, ſo liegen die Mittelpuncte dieſer Schnitte in einem Durchmeſſer; eine Ebene, durch den Endpunct desſelben parallel zu jenen Schnittebenen gelegt, berührt die Fläche. Dieſer Durchmeſſer und irgend eine jener Parallel-Ebenen heißen einander wechſelſeitig zugeordnet. — Eine Ebene, welche durch einen Durchmeſſer geht, heißt eine Diametralebene. Hat die Fläche einen Mittelpunct, ſo kann man durch dieſen auf unendlich viele Arten je drei Diametralebenen von der Beſchaffenheit legen, daß jede alle Sehnen halbirt, welche mit der Schnittlinie der beiden andern parallel läuft. Dieſe Schnittlinie iſt nothwendig ein Durchmeſſer und als ſolcher der erſten Diametralebene zugeordnet. Die drei Diametralebenen ſelbſt heißen einander zugeordnet. — Durch jeden Punct einer Fläche, welche keinen Mittelpunct hat (alſo durch jeden Punct eines Paraboloids) kann man ebenfalls drei zugeordnete Ebenen legen, von denen aber nur zwei Diametralebenen ſind; die dritte iſt eine Berührungsebene und dem Durchmeſſer zugeordnet, nach welchem ſich die Diametralebenen ſchneiden. Hier halbirt jede Diametralebene die Sehnen, welche parallel ſind mit der Schnittlinie der andern Diametralebene und der Berührungsebene. — Die Hauptebenen einer Fläche ſind einander zugeordnete Diametralebenen.

§. 238.

Aufg. Ein Hyperboloid mit einem Mantel, von welchem zwei Hauptebenen den Grundebenen parallel ſind, iſt durch die Projectionen der feſten Hyperbel (bc, v'b'c''w') und der kleinſten Ellipſe (vuw, v'w') gegeben *). Man ſoll für einen Punct A der Fläche, deſſen eine Projection man kennt, die zweite Projection finden. Fig. 99.

Aufl. Iſt die H-Projection a des Punctes A gegeben, ſo denke man ſich die H-Projection abc für diejenige Lage der Erzeugungsellipſe gezeichnet, welche durch A geht. Die Ellipſen abc und uvw ſind ähnlich und liegen ſo gegeneinander, daß die Mittelpuncte und die Richtungen der Axen ineinander fallen. Daraus folgt, daß überhaupt zwei entſprechende Puncte (d. h. zwei Puncte, welche als entſprechende Ecken ähnlicher einbeſchriebener Polygone betrachtet werden können) mit dem gemeinſchaftlichen Mittelpuncte o in gerader Linie liegen müſſen, und daß die Entfernungen dieſer Puncte von o ſich verhalten wie die großen oder auch wie die kleinen Axen der Ellipſen. Dem Puncte a in abc entſpricht der Punct u in uvw; verbindet man u mit dem Scheitel v und zieht ab || uv, ſo iſt b der Scheitel der Ellipſe abc. Der Punct b führt nun auf die (zum Grundſchnitt parallele) V-Projection b'c' oder b''c'' der durch A gehenden Ellipſe; und iſt dieſe einmal gezogen, ſo findet man ſogleich auch die zu a gehörige V-Projection a' oder a''. — (Die Ellipſe abc braucht, wie man ſieht, nicht wirklich gezeichnet zu werden).

Iſt die V-Projection a' von A gegeben, ſo ziehe man zuerſt die V-Projection b'a'c' der durch A gehenden Erzeugungsellipſe ABC, denke ſich durch letztere und durch die Ellipſe UVW einen Kegel gelegt (vgl. §. 236, †) und beſtimme die V-Projection o'' für deſſen Spitze (mittels der

*) Es iſt klar, daß hiebei bc || GS, v'w' || GS und die Hyperbelaxe o'o'' ⊥ GS ſein muß; und eben ſo in der folgenden Aufgabe (§. 239) vw || v'x' || GS.

Verbindungslinie b′v′). Die durch A gehende Mantellinie dieſes Kegels ſchneidet die Ellipſe UVW in einem Puncte, deſſen V-Projection u′ iſt, und dieſer V-Projection entſpricht als zugehörige H-Projection entweder u oder u_o; daher iſt die H-Projection jener Mantellinie entweder oua oder ou_oa_o und es gehört zu a′ entweder a oder a_o.

(Zur Übung löſe man vorſtehende Aufgabe auch in Bezug auf die Flächen 3, 5, 6 des §. 236.)

§. 239.

Fig. 100. **Aufg.** Ein hyperboliſches Paraboloid, deſſen Hauptebenen den Grundebenen parallel ſind, hat (tvt_o.., v′t′..) als feſte und (vw.., w′v′w″..) als erzeugende Parabel; für einen Punct A desſelben iſt die eine Projection gegeben; man verlangt die zweite Projection.

Aufl. Iſt die H-Projection a gegeben, ſo projicirt ſich die durch A gehende Lage der Erzeugungsparabel in die Richtung der mit vw parallelen Geraden at und ihr Scheitel in t; ihre V-Projection iſt congruent mit w′v′w″.. und hat die Richtung von v′t′ zur Axe. Würde dieſe V-Projection wirklich gezeichnet, ſo fände man ſogleich die zu a gehörige V-Projection a′ (oder a″) des Punctes A. Man kann dieſe letztere aber erhalten, ohne daß man die Parabel a′t′a″ conſtruirt; denn denkt man ſich die Parabel AT durch parallele Rückung in die Hauptebene nach VW verſetzt, und zwar ſo, daß der Scheitel (t, t′) den geradlinigen Weg (tv, t′v′) beſchreibt, ſo beſchreibt A eine mit (tv, t′v′) parallele Gerade und kommt in einen Punct W der Parabel VW zu liegen, deſſen H-Projection w mittels der zu tv parallelen aw gefunden wird. Beſtimmt man die zu w gehörige V-Projection w′ (oder w″), ſo erhält man die zu v′t′ parallele V-Projection w′a′ (oder w″a″) der von A durchlaufenen Geraden, und alſo auch die zu a gehörige V-Projection a′ (oder a″). — (Man kann TV und AW auch als Mantellinien eines Cylinders betrachten, in welchem

die Parabeln AT und VW parallele Schnitte ſind. Vgl. §. 236, ††).

Iſt die V=Projection a′ von A gegeben, ſo ziehe man a′w′ || GS, mache v′t′ = w′a′, beſtimme die zu t′ gehörige H=Projection t (oder t_o), ziehe ta (oder $t_o a_o$) || GS und fälle a′aa$_o$ ⊥ GS; dann iſt a (oder a_o) die H=Projection von A.

Umhüllungsflächen.

§. 240.

Wenn eine Fläche ſich nach einem vorgeſchriebenen Geſetze ſtetig bewegt, ſo wird im Allgemeinen jede Lage derſelben von der unmittelbar darauffolgenden nach einer (geraden oder krummen) Linie geſchnitten, und der Inbegriff aller dieſer Linien bildet eine ſtetige Fläche, welche die Umhüllungsfläche der erſten genannt wird. Die bewegliche Fläche, welche zugleich auch ihre Geſtalt nach einem beſtimmten Geſetze ändern kann, heißt die umhüllte, und jede Lage derſelben wird von der Umhüllungsfläche nach derjenigen Linie berührt, welche durch den Schnitt dieſer Lage mit der unmittelbar darauffolgenden entſteht. Dieſe Linie ſelbſt nennt man die Characteriſtik der Umhüllungsfläche, weil durch ſie der Character der letztern eben ſo deutlich ausgeſprochen iſt, wie durch die bewegliche Fläche. Man ſieht leicht, daß man die Umhüllungsfläche auch durch Bewegung der Characteriſtik entſtehen laſſen kann.

§. 241.

(Umhüllte Ebenen.) Iſt die umhüllte Fläche eine Ebene, ſo iſt die Characteriſtik nothwendig eine gerade Linie. Drei aufeinanderfolgende Lagen der umhüllten Ebene bringen zwei aufeinanderfolgende Lagen der Characteriſtik hervor, und dieſe müſſen (da ſie beide in der mittleren Ebene liegen) entweder parallel ſein oder ſich ſchneiden. Im erſtern Falle iſt die Umhüllungsfläche eine Cylinderfläche; im andern Falle gehen entweder alle Lagen der Characteriſtik durch einen und den-

ſelben Punct und die Umhüllungsfläche iſt eine Kegelfläche — oder die beiden Schnittpuncte von je drei aufeinderfolgenden Lagen enthalten zwiſchen ſich ein unendlich kleines Stück der mittleren Lage, und dann hat man dieſe aneinandergereihten Stücke als die Elemente einer Curve zu betrachten, an welcher ſämmtliche Lagen der Characteriſtik Tangenten ſind. Jede Lage der umhüllten Ebene iſt eine Berührungsebene dieſer Curve, da ſie durch zwei benachbarte Elemente derſelben geht. Eine ſolche Curve heißt die Rückkehrcurve der Umhüllungsfläche, weil in ihr zwei Mäntel der letztern zuſammenhängen, auf ähnliche Weiſe wie zwei Zweige einer Curve in einem Rückkehrpuncte. *)

†) Eine Rückkehrcurve kann aber auch bei ſolchen Umhüllungsflächen vorkommen, deren Characteriſtik eine krumme Linie iſt, und ſie bildet ſich (eben ſo wie vorhin) durch die allenfallſigen Durchſchnitte aufeinanderfolgender Lagen der Characteriſtik.

§. 242.

(Umhüllte Kugeln.) Wenn der Mittelpunct einer Kugel in irgend einer Linie L fortläuft, ſo iſt die Characteriſtik ihrer Umhüllungsfläche ein Kreis, welcher in einer Normalebene der L liegt; denn die Ebene des Kreiſes, nach welchem ſich zwei Kugeln ſchneiden, ſteht ſenkrecht auf der Verbindungslinie ihrer Mittelpuncte, und dieſe Verbindungslinie wird für zwei unendlich nahe Lagen der umhüllten Kugel zu einem Elemente der L.

Wenn L gerade iſt, ſo muß die Einhüllungsfläche (bei conſtantem oder geſetzmäßig veränderlichem Kugelhalbmeſſer)

---

*) Um ein beſtimmtes Beiſpiel von der Umhüllung einer Ebene vor Augen zu haben, laſſe man dieſe ſich ſo bewegen, daß ſie beſtändig auf einer gegebenen Curve normal bleibt. Iſt dieſe Curve eben, ſo iſt jede Lage der Characteriſtik ſenkrecht auf der Ebene derſelben, und die Umhüllungsfläche der beweglichen Ebene iſt alſo eine Cylinderfläche. Iſt die Curve gewunden, ſo wird die Umhüllungsfläche eine Rückkehrcurve erhalten.

Digitized by Google

immer eine Drehungsfläche ſein, welche die L zur Drehungsaxe, die Characteriſtik zum Parallelkreis, und zum Meridian die Umhüllungslinie der größten Kreiſe hat, nach welchen eine durch L beliebig gelegte Ebene die verſchiedenen Lagen der Kugel ſchneidet. — Will man irgend eine vorgegebene Drehungsfläche als Umhüllungsfläche einer Kugel erſcheinen laſſen, ſo hat man den Mittelpunct der beweglichen Kugel in die Drehungsaxe zu legen und zum Halbmeſſer immer die Normale des Meridians zu nehmen, welche vom Kugelmittelpuncte ausgeht und bis an die Peripherie des Meridians reicht.

Bleibt der Halbmeſſer der Kugel conſtant (während L entweder gerade oder krumm iſt), ſo iſt die Characteriſtik ein größter Kreis; die Umhüllungsfläche ſelbſt iſt eine röhrenförmige Fläche, und die L heißt die Leitende der umhüllten Kugel. Einer geraden Leitenden entſpricht als Umhüllungsfläche der Mantel eines geraden Cylinders; einer kreisförmigen Leitenden ein Wulſt (denn die Ebene der Characteriſtik geht, da ſie immer normal auf der Kreisperipherie bleibt, in allen Lagen durch eine Gerade, welche im Mittelpuncte des Kreiſes ſenkrecht auf ſeiner Ebene ſteht und die Drehungsaxe des Wulſtes abgiebt). Eine röhrenförmige Fläche, welche unter Anderm auch dadurch beſonderes Intereſſe gewährt, daß ſie eine Rückkehrcurve hat, wird ſpäter (Cap. V.) noch zur Sprache kommen. Hier aber mag als Beiſpiel für die Zeichnung einer Röhrenfläche diejenige dienen, bei welcher die Leitende eine Schraubenlinie iſt.

Der Umriß der Umhüllungsfläche muß eine Umhüllungslinie der Kugelumriſſe ſein, und der Kugelumriß ſelbſt iſt immer ein Kreis vom Halbmeſſer der Kugel. Man projicire Fig. 101.
daher die Schraubenlinie, indem man die HE ſenkrecht zu ihrer Axe annimmt (§. 200), beſchreibe um die Projectionen verſchiedener Puncte der Schraubenlinie Kreiſe mit dem gegebenen Kugelhalbmeſſer, und zeichne in jeder Grundebene eine krumme Linie, welche die gleichnamigen Umriſſe der Kugel berührt, ſo hat man die Umriſſe der Röhrenfläche. — Bei den in Fig. 101 gewählten Verhältniſſen wird der hori-

Digitized by Google

zontale Umriß durch zwei Kreiſe gebildet, welche mit der H-Projection der Schraubenlinie concentriſch ſind und deren Halbmeſſer man erhält, wenn man den Halbmeſſer dieſer Projection um den Kugelhalbmeſſer vermehrt und vermindert. Der verticale Umriß beſteht aus einzelnen getrennten Theilen. Wenn man nämlich die Kreiſe vom Puncte a′ aus bis zum Puncte c′ verfolgt und ihre obere Umhüllungslinie zieht, ſo bricht dieſe da ab, wo ſie den um c′ beſchriebenen Kreis berührt; denn, wie nahe man auch den Punct d′ an c′ rücken mag, man kann niemals von dem Kreiſe um c′ auf den Kreis um d′ übergehen, weil wegen des Umkehrens der Curve b′c′d′ der Schnittpunct des Kreiſes um c′ mit dem zunächſt vorhergehenden ſtets innerhalb des Kreiſes um d′ liegen muß. Folgt man der Umhüllungslinie vom Puncte x′ vorwärts und rückwärts, ſo kommt man aus ähnlichen Gründen auf zwei Puncte y′, z′, über welche hinaus ſie nicht mehr fortgeſetzt werden kann. Derſelbe Fall wiederholt ſich für jeden Umgang der Schraubenlinie.

[Bezeichnet ϱ den Halbmeſſer der Kugel, r den Halbmeſſer für die H-Projection der Schraubenlinie, h die Höhe des Schraubenganges, ſo können folgende verſchiedene Fälle eintreten: I.) $\varrho < \frac{1}{2}$ h; II.) $\varrho = \frac{1}{2}$ h; III.) $\varrho > \frac{1}{2}$ h; und jeder derſelben hat wieder als beſondere Fälle unter ſich: 1.) $\varrho <$ r; 2.) $\varrho =$ r; 3.) $\varrho >$ r. Nur der erſte von dieſen neun Fällen iſt in der Figur berückſichtigt. Wie ändert ſich die Geſtalt der Fläche in den acht übrigen Fällen?]

§. 243.

(Umhüllte Cylinder.) Aus allen Puncten einer ebenen Curve errichte man Senkrechte auf der Ebene derſelben, ſo daß ſich eine Cylinderfläche bildet. Dreht man dann die Ebene der Curve um eine in ihr liegende Gerade, ſo tritt als Umhüllungsfläche des mit der Curve feſt verbundenen Cylinders eine Drehungsfläche auf, welche jene Curve zum Meridian hat. Jeder Mantellinie des Cylinders entſpricht als Umhüllungslinie ein Parallelkreis.

Digitized by Google

Jede durch Umhüllung einer conſtanten Kugel entſtandene Fläche iſt zugleich auch die Umhüllungsfläche eines geraden Cylinders, deſſen kreisförmige Baſis ihren Mittelpunct in der Leitenden hat und in einer Normalebene der Leitenden liegt.

§. 244.

(Umhüllte Kegel.) Die umhüllte Fläche ſei ein gerader Kegel, deſſen Axe mit der Axe irgend einer Drehungsfläche zuſammenfällt. Bewegt ſich nun die Spitze des Kegels in der Drehungsaxe fort, und ändert ſich dabei der Kegel ſo, daß die in eine beſtimmte Meridianebene fallenden Mantellinien ſtets Tangenten an der Meridiancurve ſind, ſo iſt klar, daß als ſeine Umhüllungsfläche die Drehungsfläche ſelbſt entſteht und als Characteriſtik der veränderliche Parallelkreis dieſer Fläche erſcheint. (Die Spitze des Kegels kann dabei auch in unendliche Entfernung rücken, ſo daß der Kegel in einen Cylinder übergeht).

Die Spitze eines Kegels bewege ſich in der Richtung einer Ellipſenaxe; die in der Ebene der Ellipſe liegenden Mantellinien ſeien Tangenten an dieſer; die Baſis des Kegels ſei eine andere Ellipſe, welche ſich ſtets ähnlich bleibt und zu einer Axe die Verbindungslinie der Puncte hat, in denen die erwähnten Mantellinien die Ellipſe berühren; dann wird die Umhüllungsfläche des Kegels das (in §. 236, 3 aufgeführte) Ellipſoid ſein. (Auf ähnliche Weiſe können die Flächen 4, 5, 6 des §. 236 als Umhüllungslinien eines Kegels zum Vorſchein kommen.)

Regelflächen.

§. 245.

Jede Fläche, welche durch Bewegung einer geraden Linie erzeugt werden kann, wird eine Regelfläche (regelrechte Fläche) genannt, weil man auf ihr nach unendlich vielen Richtungen ein Lineal (eine Regel) anlegen kann. Eine beliebige Lage der erzeugenden Geraden heißt (wie ſchon

früher bei einzelnen Beiſpielen bemerkt wurde) eine Mantellinie.

Die Regelflächen zerfallen in zwei weſentlich verſchiedene Klaſſen, indem je zwei aufeinanderfolgende Lagen der erzeugenden Geraden entweder in einerlei Ebene liegen oder nicht. Nennt man den unendlich ſchmalen Streifen der Fläche, welcher zwiſchen zwei ſolchen Lagen enthalten iſt, ein Element der Fläche, ſo ſind im erſtern Falle die ſämmtlichen Elemente eben, und es iſt möglich, alle dieſe Elemente in ununterbrochener Folge in einer Ebene aneinander zu reihen oder die Fläche ſelbſt ohne Riß und Falte in eine Ebene auszubreiten, weshalb eine ſolche Fläche entwickelbar heißt. Im zweiten Falle ſind die Elemente nicht eben, die Fläche ſelbſt wird demnach nicht zu einer Ebene ausgeſpannt werden können und heißt windſchief (windiſch, gewunden.)

Entwickelbare Flächen können nur unter den Regelflächen vorkommen. Denn jede Fläche, welche ſich zu einer ununterbrochenen Ebene ausbreiten läßt, muß auch umgekehrt aus einer Ebene hergeſtellt werden können, indem man dieſe in unendlich ſchmale Streifen bricht, deren jeder mit der Erweiterung des benachbarten einen ſehr kleinen Winkel bildet. Eine Ebene läßt ſich aber nur nach einer geraden Linie brechen (vgl. §. 2, IV), und deshalb muß die aus ihr gebildete Fläche unendlich viele gerade Linien enthalten oder eine Regelfläche ſein.

A.) Entwickelbare Flächen.

§. 246.

Die Umhüllungsfläche einer Ebene iſt (nach §. 241) immer eine Regelfläche und zwar eine entwickelbare, welche die Characteriſtik zur Erzeugenden hat. Umgekehrt kann jede entwickelbare Fläche (wenn ſie nicht gerade eine Cylinder- oder Kegelfläche iſt) als die Umhüllungsfläche einer Ebene angeſehen werden, welche an einer gewundenen Curve ſtets Berührungsebene bleibt, und dieſe Curve iſt die Rück-

Digitized by Google

kehrcurve. Oder man kann auch ſagen, eine entwickelbare Fläche entſtehe durch die Bewegung einer Geraden, welche an einer gewundenen Curve ſo fortgleitet, daß ſie dieſelbe fortwährend berührt. (Bei der Kegelfläche reducirt ſich die Curve auf einen Punct, durch welchen die Gerade beſtändig geht, und für die Cylinderfläche hat man dieſen Punct in unendlicher Entfernung zu denken.)

Iſt auf einer entwickelbaren Fläche irgend eine Curve gezeichnet, ſo geht dieſe nach der Entwickelung in eine andere (ebene) Linie über, welche die Verwandelte der erſten heißt. Die Länge eines beſtimmten Bogens einer ſolchen Linie kann ſich durch die Entwickelung nicht ändern; deshalb iſt auf einer entwickelbaren Fläche der kürzeſte Weg zwiſchen zwei gegebenen Puncten diejenige Curve, deren Verwandelte eine Gerade giebt; und umgekehrt erhält man die kürzeſte Linie zwiſchen zwei Puncten, wenn man in der entwickelten Fläche dieſe Puncte durch eine Gerade verbindet und hierauf die Fläche zu ihrer urſprünglichen Geſtalt zurückbiegt. Auf einer Cylinderfläche iſt ſonach die kürzeſte Entfernung zweier Punkte ein Bogen einer **Schraubenlinie** im weitern Sinne (vgl. §. 209).

Die Winkel, unter denen eine auf der Fläche liegende Curve C die einzelnen Mantellinien ſchneidet, bleiben offenbar auch nach der Entwickelung dieſelben. (Wenn daher eine Cylinderfläche durch eine Ebene ſenkrecht zur Erzeugenden geſchnitten wird, ſo muß die Verwandelte des Schnittes eine Gerade geben, weil die Elemente des Schnittes ſenkrecht auf den Mantellinien ſtehen.) — Die Winkel, unter welchen die Elemente der Curve C aneinanderſtoßen (die Contingenzwinkel) werden ſich durch die Entwickelung ändern; mithin auch die Krümmung der Curve. Nur in dem Falle erleiden jene Winkel keine Änderung, wenn die Curve C die Rückkehrcurve iſt. Denn bedeutet M_0 die Mantellinie, bei welcher man die Entwickelung beginnt, und $M_1, M_2, M_3 \ldots$ die zunächſt folgenden Mantellinien, von denen jede die vorhergehende ſchneidet, ſo dreht man, behufs der Entwickelung, zuerſt das Flächenelement $[M_0, M_1]$

(d. h. die unendlich ſchmale Ebene zwiſchen M_0 und M_1) um M_1 ſo lange, bis es in einerlei Ebene mit dem Elemente [M_1, M_2] liegt; dann dreht man die Ebene [M_0, M_2] um M_2, bis ſie in die Erweiterung der Ebene [M_2, M_3] fällt, u. ſ. f.; nun ändert aber ein Winkel ſeine Größe nicht, wenn man ihn um den einen Schenkel dreht; daher bleiben die Winkel zwiſchen den einzelnen Mantellinien immer dieſelben, und dieſe Winkel ſind eben die Contingenzwinkel der Rückkehrcurve, da die Mantellinien nichts anders als die verlängerten Elemente der letztern ſind.

Diejenigen Flächen, deren Entwickelung in der Technik am häufigſten begehrt wird, ſind die Kegel- und Cylinderflächen, und von ihrer Entwickelung wird ſpäter (im vierten und fünften Kapitel) gehandelt werden. Jede andere entwickelbare Fläche wird man dadurch in eine Ebene ausbreiten können, daß man je zwei aufeinanderfolgende Mantellinien für Seiten eines Dreiecks nimmt, welches zur Baſis die Entfernung der Spuren dieſer Mantellinien, zur Spitze den Punct der Rückkehrcurve hat, in welchem ſich die beiden Mantellinien ſchneiden; dieſe Dreiecke werden aus ihren Seiten conſtruirt und entſprechend aneinandergefügt. Doch läuft man hiebei auch bei ſorgfältigſter Ausführung immer Gefahr, zu fehlen, weil man es mit ſehr kleinen Größen zu thun hat und jede Ungenauigkeit ſich durch Wiederholung bedeutend vergrößert. Daher iſt es ſtets von Vortheil, wenn man auf der zu entwickelnden Fläche eine Curve findet, deren Verwandelte ſich zum Voraus beſtimmen läßt, indem man dann dieſe Verwandelte der ganzen Entwickelung zu Grunde legen kann. Ein ſolcher Fall ſoll hier zunächſt betrachtet werden.

Entwickelbare Schraubenfläche.

§. 247.

Eine Gerade, welche an einer Schraubenlinie ſo hingleitet, daß ſie ſtets Tangente bleibt, erzeugt die **entwickelbare Schraubenfläche**. Um dieſe Fläche darzuſtellen, könnte man zuerſt die Schraubenlinie projiciren und dann eine

Anzahl ihrer Tangenten zeichnen. Leichter und genauer aber iſt das folgende Verfahren.

Denkt man ſich die Axe der Schraubenlinie ſenkrecht zur HE, ſo liegen die H-Spuren ihrer ſämmtlichen Tangenten in der Evolvente APX des Kreiſes Abc.., welcher ihre H-Projection vorſtellt (§. 210, Zuſ. III.), und dieſe Evolvente iſt demnach die H-Spur der Fläche ſelbſt. Mit der Zeichnung derſelben (nach §. 186) beginne man die Darſtellung. In der H-Spur der Schraubenlinie, welche man am beſten in den Punct A verlegt, deſſen Tangente dem Grundſchnitt parallel iſt, entſpringt die Evolvente, und wenn ſie dieſe Tangente wieder erreicht (in X, wobei AX = der rectificirten Kreisperipherie), ſo hat die Erzeugende der Fläche einen Umgang der Schraubenlinie durchlaufen. Um die V-Projection a''x' der letzten Mantellinie (welche X als H-Spur und AX als H-Projection hat) zu erhalten, mache man a'a'' gleich der Ganghöhe der Schraubenlinie. Es ſtellt dann a''x' die wahre Länge der in (X, x') und (A, a'') begrenzten Erzeugenden und alſo zugleich die Rectification des Schraubenganges dar (§. 210, Zuſ. I). Legt man durch (A, a'') parallel zur HE eine Ebene, welche in a''y' ihre V-Spur hat und die Deck-Ebene heißen möge, ſo ſind die zwiſchen dieſer und der HE enthaltenen Stücke aller Mantellinien von einerlei Größe, da (nach §. 210, Zuſ. II) dieſe Mantellinien einerlei H-Neigung haben; daher ſind auch die H-Projectionen aller dieſer Stücke gleichgroß (§. 72, I), nämlich = AX. Wenn man alſo die V-Projection der Mantellinie finden will, welche W zur H-Spur und die Kreistangente Wev zur H-Projection hat, ſo mache man Wv = XA, beſtimme die zu v gehörige in a''y' gelegene V-Projection v', und ziehe w'v'. Auf dieſe Weiſe kann man zu beliebig vielen Mantellinien die V-Projectionen zeichnen, und die Umhüllungslinie derſelben giebt dann die V-Projection der Schraubenlinie. — Die Curve, welche durch die Schnitte der Mantellinien in der Deck-Ebene ſich bildet und welche ſich auf die HE unverändert nach A..q..y projicirt, iſt eine Evolvente des Kreiſes, in welchem die Deck-

Fig. 102.

Ebene den Schraubencylinder ſchneidet; ſie liegt mit der Evolvente APX ſymmetriſch und ihre H-Projection Aqy tritt an die Stelle des zweiten Zweiges von APX.

Anmerk. Was in Fig. 102 dargeſtellt iſt, iſt nur ein Stück der Schraubenfläche. Um ſich zu einer allgemeinen Vorſtellung von der ganzen Fläche zu erheben, hat man ſich die Schraubenlinie (Abc.., a'b'c'...) über (A, a'') hinauf und unter (A, a') hinab durch beliebig viele Umgänge fortgeſetzt zu denken, und jede einzelne Lage der Erzeugenden ohne Grenzen zu nehmen. Die vollſtändige H-Spur der Fläche wird die ohne Ende fortlaufende Evolvente des Kreiſes Abc. (Die Spuren derjenigen Mantellinien, welche die fortgeſetzte Schraubenlinie unterhalb der HE berühren, fallen in den Zweig Aqy... der Kreisevolvente.)

§. 248.

Trägt man auf jeder Tangente einer Schraubenlinie vom Berührungspuncte aus ein conſtantes Stück (immer nach der nämlichen Seite hin) ab, ſo iſt der Ort für die Endpuncte dieſer Stücke eine zweite Schraubenlinie, welche mit der erſten einerlei Ganghöhe und einerlei Axe hat.

Beweis. Wegen der gleichen Länge und gleichen H-Neigung (§. 210, Zuſ. II) der abgeſchnittenen Stücke ſind auch ihre H-Projectionen gleich (§. 72, I), daher liegen die Endpuncte dieſer Projectionen in einem mit Abce concentriſchen Kreiſe *). Um nun nachzuweiſen, daß die in dieſem Kreiſe projicirte Curve wirklich eine Schraubenlinie ſei, iſt noch zu zeigen, daß die H-Diſtanzen ihrer einzelnen Puncte im Verhältniß mit den Bögen wachſen, welche zwiſchen den entſprechenden H-Projectionen liegen. Betrachtet man irgend drei Lagen (cγ, c'γ'), (dδ, d'δ'), (eε, e'ε') je-

---

*) Nämlich: die Endpuncte aller gleichgroßen Tangenten eines Kreiſes Abce ſind gleichweit von deſſen Mittelpuncte entfernt.

Digitized by Google

nes conſtanten Stücks, ſo iſt klar, daß die Unterſchiede der den Berührungspuncten (c, c′), (d, d′), (e, e′) entſprechenden H-Diſtanzen eben ſo groß ſein müſſen wie die Unterſchiede der H-Diſtanzen für die Endpuncte (γ, γ′), (δ, δ′), (ε, ε′); denn wenn man das Stück (cγ, c′γ′) durch ſucceſſives Fortrücken in andere Lagen bringt, ſo erheben ſich der Berührungspunct und der Endpunct immer um gleichviel über die HE. Die erſtgenannten Unterſchiede und alſo auch die (ihnen gleichen) letztgenannten Unterſchiede verhalten ſich wie die Bögen cd, de des Kreiſes Abce; dieſe Bögen aber ſtehen (wie aus der Elementargeometrie bekannt) in Proportion mit den Bögen γδ, δε des Kreiſes γδε, woraus hervorgeht, daß die Puncte (γ, γ′), (δ, δ′), (ε, ε′) wirklich auf einer Schraubenlinie liegen, deren H-Projection der Kreis γδε.. und deren Ganghöhe die nämliche iſt wie für die Schraubenlinie (Abcd..., a′b′c′d′...).

Man ſieht, daß man die Schraubenlinie (γδε.., γ′δ′ε′..) als den Schnitt der Schraubenfläche und eines Cylinders betrachten kann, welcher mit dem Cylinder der urſprünglichen Schraubenlinie concentriſch liegt, d. h. ſo, daß beide einerlei Axe haben. Daher heißen die beiden Schraubenlinien ſelbſt concentriſch.

§. 249.

Bei der Entwickelung der Schraubenfläche verwandelt ſich die Schraubenlinie (Abc..., a′b′c′...) in einen Kreis. Denn es kann die Schraubenlinie, da ſie die Rückkehrcurve der Fläche iſt, ihre Contingenzwinkel (oder ihre Krümmungshalbmeſſer) durch die Entwickelung nicht ändern (§. 246); nun iſt aber ihre Krümmung durch alle Puncte conſtant (§. 211); daher muß auch ihre ebene Verwandelte von durchaus gleicher Krümmung ſein, und dieſer Bedingung entſpricht unter allen ebenen Curven blos der Kreis.

Die Tangenten (cγ, c′γ′), (dδ, d′δ′), (eε, e′ε′) der urſprünglichen Schraubenlinie ſind nach der Entwickelung Tangenten an ihrer kreisförmigen Verwandelten, und wegen der

Digitized by Google

gleichen Länge liegen die Endpuncte dieſer Tangenten in einem Kreiſe, welcher mit jener Verwandelten concentriſch iſt.

Die V-Projection $c'\gamma'$ für die Tangente $(c\gamma, c'\gamma')$ der urſprünglichen Schraubenlinie berührt zugleich die V-Projection der zweiten Schraubenlinie; denn die ſtetige Curve $\gamma'\delta''\epsilon'$ hat mit $c'\gamma'$ den Punct γ' gemein, muß aber übrigens ganz dieſſeits $c'\gamma'$ liegen. Die v-projicirende Ebene Kk'c' der Tangente $(c\gamma, c'\gamma')$ enthält daher auch die Tangente der zweiten Schraubenlinie für den Punct (γ, γ'); die H-Projection dieſer letztern Tangente iſt eine durch γ gelegte Tangente des Kreiſes $\gamma\delta\epsilon$ und ihre H-Spur der Punct G. Denkt man ſich nun die Schraubenfläche ſo entwickelt, daß ſie ſich in die Ebene Kk'c' ausbreitet, ſo bleiben die Linien $(c\gamma, c'\gamma')$, $(G\gamma, k'\gamma')$ Tangenten an den Verwandelten der beiden Schraubenlinien. In der horizontalen Umklappung der Ebene Kk'c' erhalten dieſe beiden Tangenten die Lagen KC_1 und $G\Gamma_1$ (vgl. §. 57, ††), und wenn man aus den Umklappungen C_1, Γ_1 der Berührungspuncte Senkrechte auf KC_1 und $G\Gamma_1$ errichtet, ſo giebt ihr Durchſchnitt M_1 den umgeklappten Mittelpunct der beiden Verwandelten, welche aus den Schraubenlinien hervorgehen, und die Halbmeſſer dieſer Verwandelten ſind M_1C_1, $M_1\Gamma_1$.

Es iſt nun nicht mehr ſchwer, den entwickelten Mantel der Schraubenfläche ſelbſt irgendwo in der HE zu zeichnen. Man beſchreibe um M einen Kreis $\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}\mathfrak{A}_2$ mit M_1C_1 und betrachte ihn als die Verwandelte der Schraubenlinie (Abc.., a'b'c'..). Macht man arc. $\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1$ = arc. $\mathfrak{C}\mathfrak{A}_2$ $= \frac{1}{2}$ x'a'' (vgl. §. 247), ſo iſt arc. $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ die Verwandelte des Schraubenganges zwiſchen (A, a') und (A, a''). Die einzelnen Mantellinien der Schraubenfläche werden in der Entwickelung zu Tangenten des Kreiſes $\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}\mathfrak{A}_2$, und wenn man von ihren Berührungspuncten aus die wahren Längen der Stücke abträgt, welche auf den entſprechenden Mantellinien zwiſchen der Schraubenlinie und der H-Spur ASKX der Schraubenfläche enthalten ſind, ſo findet man die Verwandelte dieſer Spur. Entſpricht z. B. BS der Mantel-

linie (bS, b′s′), ſo iſt S ein Punct der verwandelten ASKX, wenn BS = BS. Es iſt aber BS an Länge dem rectificirten Bogen der Schraubenlinie zwiſchen A und B gleich (§. 210, Zuſ. I) und dieſer Bogen hat wieder einerlei Länge mit dem Bogen A_1B des Kreiſes A_1CA_2, ſo daß alſo BS = arc. A_1B; daher liegt S auf der Evolvente des Kreiſes A_1CA_2, welche in A_1 entſpringt. Da man nun auf dieſelbe Bemerkung kommt, wenn man ſtatt BS irgend eine andere Tangente des Kreiſes A_1CA_2 betrachtet, ſo iſt klar, daß die Verwandelte der ASKX keine andere Linie ſein kann, als jene Evolvente. Man kann hiernach die Entwickelung desjenigen Mantels der Schraubenfläche, welcher durch ihre H-Spur und durch die Schraubenlinie (Abc.., a′b′c′..) begrenzt wird, leicht zeichnen. Die Entwickelung des andern Mantels (zwiſchen der Schraubenlinie und der Deck-Ebene) iſt eine zweite Evolvente des Kreiſes A_1CA_2, welche in A_2 entſpringt *).

B.) Windſchiefe Flächen.

§. 250.

1.) Eine Gerade iſt beſtimmt (d. h. entweder auf eine einzige Lage oder doch wenigſtens auf eine beſtimmte Anzahl von Lagen beſchränkt), wenn ſie durch einen gegebenen Punct P gehen und zwei gegebene Linien A, B ſchneiden

*) Ein Modell der entwickelbaren Schraubenfläche läßt ſich entweder aus Pappe herſtellen (indem man die beiden Figuren AKX, A″QY, welche durch die in der HE und der Deck-Ebene gelegenen Evolventen begrenzt werden, ſowie die Entwickelungen beider Mäntel ausſchneidet und dieſe vier Stücke gehörig zuſammenfügt) oder auch mit Hülfe ausgeſpannter Fäden (in welchem Falle man in zwei parallel verbundenen Ebenen jene Evolventen in der erforderlichen gegenſeitigen Stellung zeichnet und je zwei entſprechende Puncte durch einen Faden verbindet, welcher dann eine Mantellinie vorſtellt).

Digitized by Google

ſoll. Denn ihr geometriſcher Ort iſt einerſeits die Kegelfläche, welche P zur Spitze und A zur Leitenden hat, andererſeits die Kegelfläche, welcher P als Spitze und B als Leitende entſpricht; zwei Kegelflächen aber, welche eine gemeinſchaftliche Spitze P haben, können, wenn ſie überhaupt zum Durchſchnitte kommen, nur eine oder mehrere gerade Linien gemein haben. (Sind A und B ſelbſt gerade Linien, ſo gehen die oben erwähnten Kegelflächen in Ebenen über.)

Es folgt hieraus, daß das Bewegungsgeſetz einer Geraden G völlig gegeben iſt, wenn ſie beſtändig drei gegebene Linien A, B, C ſchneiden ſoll; man darf, um dieß einzuſehen, nur ſtatt des Punctes, der oben mit P bezeichnet wurde, nach und nach alle Puncte der Linie C eintreten laſſen. Die durch dieſe Bewegung erzeugte Regelfläche wird im Allgemeinen windſchief ſein; denn wenn die Erzeugende G von einer Lage in die (unendlich nahe) folgende Lage übergeht, gleitet ſie auf jeder der drei Linien A, B, C durch ein Element fort, d. h. ſie bleibt auf den drei Tangenten, welche an die Linien A, B, C durch die Puncte gelegt ſind, in denen dieſelben von der erſten Lage geſchnitten werden, und dieſe drei Tangenten werden im Allgemeinen nicht in einerlei Ebene liegen, alſo eben ſo wenig die beiden benachbarten Lagen der Erzeugenden. Die Linien A, B, C heißen die Leitenden der erzeugten Fläche.

2.) Man laſſe eine Gerade G auf zwei Leitenden A, B beſtändig aufliegen, während ſie zugleich einer gegebenen Ebene E (der Richt-Ebene) parallel bleibt. Dadurch iſt die Bewegung der G beſtimmt. Denn iſt P ein Punct in A, ſo iſt die durch ſie gehende Lage der G ein Schnitt einer durch P parallel zu E geführten Ebene und einer Kegelfläche, welche P zur Spitze und B zur Leitenden hat (und in eine Ebene übergeht, falls B gerade iſt). Läßt man demnach den Punct P die Linie A durchlaufen, ſo entſprechen ſeinen einzelnen Lagen beſtimmte Lagen der G. Die erzeugte Fläche wird windſchief ſein, weil die beiden Elemente der Linien A, B, welche zwiſchen zwei aufeinanderfolgenden Lagen der G enthalten ſind (oder die durch Verlängerung dieſer Elemente

entſtehenden Tangenten), im Allgemeinen nicht in einerlei Ebene liegen werden.

Iſt eine von den Leitlinien A, B **gerade**, ſo nennt man die erzeugte Fläche ein **Conoid**, und zwar ein **ſenkrechtes** in dem beſondern Falle, wo dieſe leitende Gerade ſenkrecht auf der Richt-Ebene ſteht.

3.) Der Ort einer Geraden G, welche durch einen gegebenen Punct P geht und eine gegebene Fläche F berührt, iſt eine Kegelfläche, und der Ort des Berührungspunctes eine auf F liegende Curve B. Soll nun die G zugleich eine gegebene Linie A ſchneiden, ſo beſtimmt ſie ſich als Durchſchnitt jener Kegelfläche und einer andern, welche mit der erſtern die Spitze P gemeinſchaftlich hat und zur Leitenden die Linie A. Denkt man ſich nun den Punct P auf einer gegebenen Linie C fortſchreitend, ſo überzeugt man ſich wie in (1), daß das Bewegungsgeſetz der G gegeben iſt, wenn ſie auf zwei Leitlinien A, C aufliegen und eine gegebene **Leitfläche** F berühren ſoll, und daß die von ihr erzeugte Fläche im Allgemeinen windſchief iſt.

4.) Auf ähnliche Weiſe iſt zu zeigen, daß eine Gerade G eine windſchiefe Fläche erzeugt, wenn ſie fortwährend auf einer Leitlinie A aufliegt und eine Leitfläche berührt, während ſie zugleich einer Richt-Ebene parallel bleibt.

Iſt hiebei A **gerade**, ſo rechnet man die erzeugte Fläche zu den **Conoiden**.

Eine windſchiefe Fläche würde auch als Ort einer Geraden entſtehen, welcher man zur Bedingung machte, daß ſie

5.) zwei Leitflächen berühre und eine Leitlinie ſchneide, oder auch

6.) drei Leitflächen berühre.

7.) Eine Gerade G bewegt ſich geſetzmäßig, wenn ſie eine gegebene Linie A ſtets unter dem nämlichen Winkel ſchneidet und dabei auf einer zweiten gegebenen Curve B aufliegt. Denn iſt P irgend ein Punct in A, ſo iſt der Ort der durch P gehenden Lage von G ein gerader Kegel (Drehungskegel), welcher zur Axe die Tangente der A für den Punct P hat; und dieſe Lage ſelbſt beſtimmt ſich, indem dieſer Kegel durch

die Linie B in beſtimmten Puncten geſchnitten wird. Daß die von der G beſchriebene Fläche im Allgemeinen windſchief ſein wird, zeigt ſich wie in (2).

8.) Endlich könnte man der beweglichen Erzeugenden G auch aufgeben, zwei gegebene Leitlinien A, B oder auch zwei Bögen A,B einer und derſelben gewundenen Leitlinie ſo zu ſchneiden, daß das zwiſchen den Schnittpuncten enthaltene Stück von conſtanter Größe r bleibt. Iſt P ein Punct in A, und eine um P mit dem Halbmeſſer r beſchriebene Kugel wird von B in Q geſchnitten, ſo iſt PQ eine Lage der Erzeugenden. Die durch G erzeugte Fläche iſt windſchief, was wie in (2) zu erweiſen iſt.

Für dieſe verſchiedenen Erzeugungsarten windſchiefer Flächen ſollen nun einzelne Beiſpiele aufgeführt werden.

Einmanteliges Hyperboloid.

§. 251.

Das einmantelige Drehungs-Hyperboloid iſt eine windſchiefe Fläche; denn es wurde in §. 232 bewieſen, daß zwei Lagen der erzeugenden Geraden nie in einerlei Ebene fallen. Dieſe Fläche kann man nach §. 250, 1 entſtehen laſſen, indem man zu Leitenden entweder drei von den Mantellinien desjenigen Syſtems nimmt, zu welchem die Erzeugende nicht gehört; oder den Äquator, den Grundkreis und Deckkreis; oder überhaupt irgend drei Parallelkreiſe. Ferner läßt ſich dieſe Fläche nach §. 250, 8 erzeugen, wobei irgend zwei Parallelkreiſe als Leitende dienen (vgl. Anmerk. auf S. 195).

Denkt man ſich durch die Puncte a″, b″ (Fig. 97), in denen die Meridianhyperbel von der Ebene des Deckkreiſes geſchnitten wird, Tangenten an die Hyperbel gelegt, ſo müſſen ſich dieſe auf der imaginären Axe ſchneiden, weil dieſelbe die Hyperbel in congruente Hälften zerlegt; ein Kreis, welcher die genannten Hyperbeltangenten in den Puncten a″, b″ berührt, hat ſeinen Mittelpunct auf der imaginären Axe und berührt auch die Hyperbel in a″ und b″; eben ſo kann man einen Kreis zeichnen, der die Hyperbel in den

Digitized by Google

Puncten a′, b′ berührt, und deſſen Mittelpunct wird ebenfalls in der imaginären Axe liegen; ein dritter Kreis, mit der halben reellen Axe um den Mittelpunct der Hyperbel beſchrieben, berührt dieſe in den Scheiteln. Bei Drehung der Hyperbel um die imaginäre Axe erzeugen die erwähnten drei Kreiſe drei Kugeln, welche das Hyperboloid nach dem Deckkreiſe, dem Grundkreiſe und dem Äquator berühren und von jeder einzelnen Lage der erzeugenden Geraden berührt werden müſſen. Daher kann man auch das Bewegungsgeſetz dieſer Erzeugenden dahin ausſprechen, daß ſie beſtändig jene drei Kugeln berühren ſoll (vgl. §. 250, 6); oder daß ſie zwei dieſer Kugeln berührt und einen Parallelkreis ſchneidet (§. 250, 5); oder auch eine Kugel berührt und zwei Parallelkreiſe ſchneidet (§. 250, 3).

§. 252.

Nicht nur das durch Drehung erzeugte, ſondern überhaupt jedes einmantelige Hyperboloid iſt eine windſchiefe Fläche. Der Beweis darüber läßt ſich am einfachſten in folgender Weiſe führen.

Man erhält (nach §. 192, II) aus einem Kreiſe eine Ellipſe, wenn man auf den Kreisdurchmeſſer aus allen Puncten der Peripherie Senkrechte fällt und dieſe Senkrechten in einem conſtanten Verhältniſſe m : n verkürzt; der Kreisdurchmeſſer, auf welchen ſich die Senkrechten beziehen, wird die große Axe der Ellipſe. Wendet man dieſes Verfahren auf mehrere Kreiſe von verſchiedenen Halbmeſſern an, während man immer das nämliche Verhältniß m : n zu Grunde legt, ſo ſind die aus ihnen gebildeten Ellipſen ähnlich, denn in jeder verhalten ſich die Axen = m : n.

In dieſer Art verändere man nach und nach alle Parallelkreiſe eines Drehungs-Hyperboloids in ähnliche Ellipſen, deren große Axen ſämmtlich in einerlei Ebene (einer urſprünglichen Meridianebene) liegen; dann ſtellt jede ſolche Ellipſe eine Lage der erzeugenden Ellipſe vor, durch deren Bewegung (nach §. 236, 4) das einmantelige Hyperboloid entſteht, und man ſieht alſo, daß jedes ſolche Hyperboloid aus einem Dreh-

Digitized by Google

ungshyperboloid gebildet werden kann, wenn man aus allen möglichen Puncten dieſes letztern Senkrechte auf eine Meridianebene fällt und dieſe alle in einem und demſelben Verhältniſſe verkürzt. Die genannte Meridianebene iſt die eine Hauptebene der neugebildeten Fläche. Betrachtet man nun zunächſt nur diejenigen Puncte des Drehungshyperboloids, welche in einer ſeiner Mantellinien liegen, ſo müſſen die Puncte, welche denſelben nach proportionaler Verkürzung der Senkrechten entſprechen, ebenfalls in einer geraden Linie liegen; und ſo wie es auf dem Drehungshyperboloid unendlich viele Mantellinien giebt und zwar in zwei verſchiedenen Syſtemen, ſo müſſen auch auf dem neuen Hyperboloid zwei Syſteme von unendlich vielen Geraden möglich ſein. Jede Gerade des einen Syſtems muß offenbar alle Geraden des andern Syſtems ſchneiden, weil dieß auf dem Drehungshyperboloid der Fall iſt. Je zwei Gerade eines und desſelben Syſtems können weder ſich ſchneiden noch parallel ſein; denn wäre eins von beiden der Fall, ſo müßte man beim Zurückgehen auf die entſprechenden Mantellinien des Drehungshyperboloids auf einen gemeinſchaftlichen Punct dieſer letztern kommen oder auf ein Parallelſein derſelben *), was beides der Theorie des Drehungshyperboloids widerſpricht. Da nun als verſchie-

*) Möglichſter Deutlichkeit willen mögen die (leicht zu beweiſenden) Sätze, auf welche ſich die obigen Betrachtungen gründen, hier noch beſonders ausgeſprochen werden: 1.) Wenn man aus den ſämmtlichen Puncten zweier ſich ſchneidenden Geraden Senkrechte auf eine Ebene fällt und dieſe alle in einem und demſelben Verhältniß verkürzt oder auch rückwärts verlängert, ſo bilden die neuen Endpuncte wieder zwei Gerade, und dieſe müſſen ſich ſchneiden, da dem gemeinſchaftlichen Puncte des urſprünglichen Paares nur ein neuer Punct entſprechen kann; 2.) wenn man zwei Parallelen auf irgend eine Ebene projicirt und die Projectionslothe ihrer ſämmtlichen Puncte in conſtantem Verhältniß verkürzt oder rückwärts verlängert, ſo bilden die neuen Endpuncte dieſer Lothe wieder zwei Parallelen.

dene Lagen einer erzeugenden Geraden immer nur die Linien eines und desſelben Syſtems gelten können, ſo ſieht man, daß jedes einmantelige Hyperboloid eine windſchiefe Fläche iſt, wenn es auch nicht durch Drehung erzeugt werden kann, und daß die Lehrſätze, welche in §. 232 für einen beſondern Fall dieſer Fläche gefunden wurden, ganz allgemein gelten, mit Ausnahme des einzigen Satzes von der conſtanten Neigung der Mantellinien gegen die Äquatorialebene, welcher blos auf das Drehungshyperboloid beſchränkt bleibt.

Fällt man auch aus den Puncten des beim Drehungshyperboloide H vorkommenden aſymptotiſchen Kegels K Lothe auf die Meridianebene und verkürzt dieſelben in dem nämlichen Verhältniſſe, in welchem die von den Puncten des Hyperboloids H ausgehenden Lothe verkürzt wurden, ſo erhält man einen neuen Kegel 𝔎, welcher der aſymptotiſche Kegel des neuen Hyperboloids ℌ iſt. So wie nun jede Mantellinie in H eine Parallele in K hat, ſo muß auch jede Mantellinie in ℌ eine Parallele in 𝔎 haben (vgl. [2] in der Anmerk. auf S. 226.) So wie ferner in K niemals drei Mantellinien in einerlei Ebene liegen können (§. 234, zu Ende), ſo auch nicht in 𝔎, und alſo können auch die zu einerlei Syſtem gehörigen drei Mantellinien in ℌ, welche jenen in 𝔎 enthaltenen parallel ſind, nicht einer und derſelben Ebene parallel laufen.

Nach dem Vorigen kann das einmantelige Hyperboloid durch eine Gerade des einen Syſtems erzeugt werden, wenn irgend drei Gerade des andern Syſtems gegeben ſind, indem erſtere die drei letztern fortwährend ſchneiden muß; oder auch wenn drei von den elliptiſchen Schnitten gegeben ſind, welche auf dem Hyperboloide durch drei zur imaginären Axe ſenkrechte Ebenen hervorgebracht werden.

§. 253.

Ein einmanteliges Hyperboloid, deſſen imaginäre Axe ſenkrecht auf der HE ſteht, habe (o, o′) zum Mittelpunct; die durch dieſen Mittelpunct gehende Lage der Erzeugungsellipſe (welche Lage man die Äquatorial-Ellipſe nennt) habe Fig. 103.

die Halbaren OK, OJ, von denen die letztere (die kleinere) ſenkrecht auf der VE ſtehen ſoll; die große Halbare für die elliptiſche H-Spur der Fläche ſei oA (= oB). Dieſe H-Spur, für welche man die zweite Halbare oC *) und die Peripherie leicht zeichnen kann, iſt zugleich die H-Projection einer dritten Ellipſe, deren zur HE parallele Ebene (a″b″) vom Mittelpuncte (o, o″) eben ſo weit abſteht wie dieſer von der HE; daher iſt das Hyperboloid ſelbſt beſtimmt (§. 252, zu Ende). Man denke ſich dasſelbe aus einem Drehungshyperboloid, deſſen H-Spur den Durchmeſſer AB und deſſen horizontale Äquator-Projection den Durchmeſſer kl (= 2 . ok) hat, dadurch hergeſtellt, daß aus allen Puncten des Drehungshyperboloids Senkrechte auf deſſen Hauptmeridianebene (AB) gefällt und in dem Verhältniſſe ok : oi verkürzt wurden. Iſt (Sr, s′r″) irgend eine Mantellinie des Drehungshyperboloids, ſo liegt offenbar die ihr im andern Hyperboloid entſprechende Mantellinie in der nämlichen v-projicirenden Ebene, hat alſo auch die nämliche V-Projection s′r″. Die zugehörige H-Projection 𝔖r findet man, wenn man aus S und r Senkrechte auf AB fällt und die Puncte 𝔖, r verbindet, in denen dieſe Senkrechten die Peripherie der Ellipſe ACB treffen. — Betrachtet man den Kreis über AB als die Umklappung eines Kreiſes, der ſeinen Mittelpunct in o und zu ſeiner H-Projection die Ellipſe ACB hat, ſo iſt Sr die Umklappung der in 𝔖r projicirten Geraden; die Projection eines Kreiſes, deſſen Umklappung die kl zum Durchmeſſer hat, iſt eine der ACB ähnliche Ellipſe **) mit kl als großer Axe, alſo keine andere als die H-Projection kil der Äquatorial-Ellipſe. Da nun die Sr Tangente an dem Kreiſe über kl iſt (§. 231), ſo muß nothwendig 𝔖r Tangente an der Ellipſe kil ſein.

---

*) oC : oA = oi : ok.

**) Überhaupt: werden zwei in einerlei Ebene liegende Kreiſe projicirt, ſo ſind die gleichnamigen Projectionen ähnlich, indem das Axenverhältniß jeder Projection lediglich von der Grundneigung jener Ebene abhängt.

Digitized by Google

Hiernach kann man folgende Aufgaben löſen:

I.) Die beiden Mantellinien zu projiciren, welche durch den in q horizontal projicirten und unterhalb der Äquatorial-Ebene liegenden Punct des Hyperboloids gehen.

Die H-Projectionen der geſuchten Mantellinien ſind zwei durch q gehende Tangenten Sr, Uv an der H-Projection kil der Äquatorial-Ellipſe; die V-Projectionen s'r'', u'v'' findet man leicht mittels der H-Spuren S, U und der in r, v horizontal projicirten Puncte, wo die Mantellinien die Ellipſe (ABC, a''b'') treffen. (Den Berührungspuncten x, y müſſen als V-Projectionen die Schnittpuncte der k'l' mit s'r'' und u'v'' entſprechen.) Fig. 103.

Soll der in q projicirte Punct des Hyperboloids oberhalb der Äquatorial-Ebene liegen, ſo hätten die durch ihn gehenden Mantellinien ihre H-Spuren nicht in S, U, ſondern in r, u, und daher zu V-Projectionen die Linien r's'', v'u''.

Entweder der Schnitt q' der s'r'' und u'v'' oder der Schnitt q'' der r's'' und v'u'' iſt die V-Projection des Punctes Q, ſo daß durch die vorigen Conſtructionen zugleich die Aufgabe gelöſt iſt:

II.) Die V-Projection zu einem Puncte des Hyperboloids zu finden, für welchen die H-Projection q gegeben iſt. *)

Hier läßt ſich auch noch die Aufgabe anſchließen:

III.) Die H-Spur und den verticalen Umriß des aſymptotiſchen Kegels zu zeichnen.

Der aſymptotiſche Kegel des Drehungshyperboloids, mittels deſſen das neue Hyperboloid entſtand, iſt nach §. 234 zu finden; ſein Vertical-Umriß m'o'n' gilt zugleich für den aſymptotiſchen Kegel des neugebildeten Hyperboloids (da die in die Hauptmeridianebene fallenden Puncte keine Änderung ihrer Stellung erleiden); ſeine kreisförmige H-Spur verwan- Fig. 103.

---

*) Vgl. §. 238.

Digitized by Google

delt ſich beim Übergang auf das neue Hyperboloid in eine der ABC ähnliche Ellipſe, welche über dem Durchmeſſer mn jener kreisförmigen Spur als großer Axe beſchrieben iſt.

§. 254.

Es ergiebt ſich aus dem vorigen § ein ſehr einfaches Mittel, eine ſymmetriſche Darſtellung eines Hyperboloids mittels der Projectionen eines Syſtems ſeiner Mantellinien zu erhalten.

Fig. 104. Man errichte über der zum Grundſchnitt parallelen großen Axe AB einer Ellipſe ACB, welche man für die H-Spur des Hyperboloids gelten laſſen will, einen Halbkreis, theile dieſen in gleiche Theile AI, I II, II III, ... und fälle aus den Theilpuncten I, II, III,... Senkrechte auf AB, wodurch ſich auf der Ellipſe die Theilpuncte 1, 2, 3..., (1), (2), (3)... ergeben. *) Eine zum Grundſchnitt parallele Gerade a''b'' ſei die V-Projection derjenigen Ellipſe, deren H-Projection mit ACB zuſammenfällt. Verbindet man nun zwei Theilpuncte A, 8, hierauf 1, 9, dann 2, 10, u. ſ. f., ſo hat man die H-Projectionen verſchiedener Mantellinien, deren V-Projectionen a'8',..... leicht zu finden ſind. Der Vertical-Umriß der Fläche ergiebt ſich als Umhüllungslinie der vertical

*) Man braucht nicht einmal die Ellipſe ACB vorher zu zeichnen, ſondern kann diejenigen ihrer Puncte, welche den Theilpuncten des Kreiſes A..B entſprechen, dadurch finden, daß man die aus den Kreispuncten I, II, III... auf AB gefällten Senkrechten in conſtantem Verhältniſſe verkürzt. Wie eine ſolche Verkürzung am leichteſten auszuführen, zeigt Fig. 105. Beſchreibt man nämlich einen mit A..B concentriſchen Kreis, deſſen Durchmeſſer mit der kleinen Axe der Ellipſe ACB übereinſtimmt, zieht (z. B.) oII, und legt durch den Punct α, wo dieſe den innern Kreis trifft, eine Parallele α2 mit AB, ſo ſchneidet dieſe die auf AB ſenkrechte IIf in einem Puncte 2, welcher der Ellipſe ACB angehören muß; denn es verhalten ſich IIf und 2f wie die Halbmeſſer der concentriſchen Kreiſe, d. i. wie die Halbaxen der Ellipſe ACB.

Digitized by Google

projicirten — die H-Projection der Äquatorial-Ellipſe als Umhüllungslinie der horizontal projicirten Mantellinien. *)

Die Projectionen des zweiten Syſtems der Mantellinien würden auf die Projectionen des erſten Syſtems fallen. Will man dieſes zweite Syſtem in die Darſtellung mit aufnehmen, ſo ſind die ſämmtlichen Projectionen voll auszuziehen; denn jede Projection gilt dann für zwei Mantellinien zugleich, und zwar ſo, daß immer das unſichtbare (punctirte) Stück der einen mit dem ſichtbaren Stück der andern zuſammentrifft.

§. 255.

Das Drehungshyperboloid, aus welchem ein neues Hyperboloid nach §. 252 zu bilden iſt, kann auf unendlich verſchiedene Arten geſtaltet ſein; ferner kann man dem Exponenten der Verhältniſſe m:n (§. 252) unendlich viele verſchiedene Werthe geben; und endlich kann man unter den zu einerlei Syſtem gehörigen Mantellinien des neugebildeten Hyperboloids unzählig oft je drei auswählen, um ſie als Leitlinien zu benützen. Man ſieht hieraus, daß die drei geraden Leitenden eines Hyperboloids auf unendlich verſchiedene Arten gegen einander geſtellt ſein können, und wird dadurch ſchon zu der Vermuthung geführt, es möchten drei ſolche Leitende wohl ganz beliebig anzunehmen ſein, wenn ſie nur nicht einer und derſelben Ebene parallel laufen und zu zweien nicht in einerlei Ebene liegen. Um aber dieſe Vermuthung zur Überzeugung zu erheben, müßte bewieſen werden, daß die windſchiefe Fläche, bei deren Erzeugung drei ſolche beliebige Gerade $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_3$ als Leitende dienten, auch immer identiſch ſei mit der Fläche, welche entſteht, wenn man irgend

*) Um ein Modell des Hyperboloids anzufertigen, zeichne man die Ellipſen (AB, a′b′) und (AB, a″b″) in zwei parallelen Ebenen und verbinde die entſprechenden Theilpuncte durch ſtraffgeſpannte Fäden. Zugleich kann man mit Hülfe der nämlichen Theilpuncte das zweite Syſtem ſeiner Mantellinien auf ähnliche Weiſe darſtellen.

Digitized by Google

drei Lagen der Erzeugenden als neue Leitende und eine von den Linien $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_3$ als neue Erzeugende annimmt. Dieſer Beweis läßt ſich in der That führen, und zwar auf elementarem Wege. (S. Anhang, I).

Soll nun ein Hyperboloid graphiſch dargeſtellt werden, für welches man die drei geraden Leitenden beliebig annehmen darf, ſo thut man am beſten, die eine Grundebene ſenkrecht zu einer der Leitenden zu legen. Man kann dann leicht die Puncte beſtimmen, in denen eine durch dieſe Leitende gelegte Ebene die beiden andern Leitenden ſchneidet, und die Verbindungslinie der erhaltenen Schnittpuncte giebt eine Lage der Erzeugenden.

Hyperboliſches Paraboloid.

§. 256.

Eine bewegliche Gerade, welche beſtändig zwei gerade Leitende L_1, L_2 (die nicht in einerlei Ebene liegen dürfen) ſchneidet und dabei einer Richt-Ebene E parallel bleibt (welche zu keiner der Leitenden parallel ſein darf), erzeugt eine windſchiefe Fläche (vgl. §. 250, 2), von welcher ſpäter (§. 260, f) nachgewieſen werden wird, daß ſie identiſch iſt mit dem hyperboliſchen Paraboloid (§. 236, 7).

Nimmt man die Richt-Ebene E zur HE, ſo ſind die V-Projectionen aller Lagen der Erzeugenden parallel zum Grundſchnitt. Es ſeien (l_1, l^I), (l_2, l^{II}) die Leitenden und
Fig. 106. $a^I b^I$, $a^{II} b^{II}$, $a^{III} b^{III}$ die V-Projectionen von irgend drei Mantellinien, welche die Leitenden in $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ ſchneiden. Ferner ſeien c^I, c^{II}, c^{III} die V-Projectionen der drei Puncte C_1, C_2, C_3, in denen jene Mantellinien von irgend einer zu L_1 und L_2 parallelen Ebene ε geſchnitten werden. Dann beſtehen (nach einem bekannten Lehrſatze der Stereometrie) die Proportionen

$$A_1C_1 : C_1B_1 = A_2C_2 : C_2B_2 = A_3C_3 : C_3B_3 \text{ *)}$$

---

*) Man kann ſich nämlich durch L_1, L_2 Ebenen parallel mit ε gelegt denken; drei parallele Ebenen ſchneiden aber al[illegible]

und alſo auch (nach §. 25)

$$a^I c^I : c^I b^I = a^{II} c^{II} : c^{II} b^{II} = a^{III} c^{III} : c^{III} b^{III}$$

Hieraus aber folgt, daß die Puncte c^I, c^{II}, c^{III} nothwendig in einer geraden Linie liegen, welche durch den Schnitt der l^I und l^{II} geht. Die Puncte C_1, C_2, C_3 liegen demnach in der durch $c^I c^{III}$ gelegten projicirenden Ebene, und da ſie zugleich in der Ebene ε liegen, ſo ſind ſie in dem geradlinigen Durchſchnitte beider Ebenen enthalten. Dieſe Gerade iſt durch die zwei Puncte C_1, C_2 beſtimmt, und der dritte (C_3) muß immer auf ihr liegen, welche Lage der Erzeugenden man auch für die A_3B_3 gelten laſſen will, wodurch erwieſen iſt, daß überhaupt alle möglichen Lagen der Erzeugenden durch die Ebene ε in einer Geraden geſchnitten werden. Dieſer Satz bleibt wahr, wenn die Ebene ε parallel mit ſich ſelbſt beliebig verrückt wird, und läßt ſich daher ganz allgemein ſo ausſprechen: Jede Ebene, welche parallel iſt mit den beiden Leitenden L_1, L_2, ſchneidet die windſchiefe Fläche nach einer geraden Linie.

Iſt nun E eine mit L_1 und L_2 parallele Ebene, und $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ ſind irgend zwei Lagen der Erzeugenden, ſo folgt aus dem Vorigen, daß jede Gerade, welche dieſe beiden Lagen ſchneidet und zugleich mit E parallel iſt, ganz auf der windſchiefen Fläche liegen muß, und daß alſo dieſe Fläche noch eine zweite Erzeugung zuläßt, wobei die Ebene E als Richt-Ebene und die Geraden $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ als Leitende auftreten; die Linien L_1, L_2, welche bei der erſten Erzeugung die Leitenden waren, erſcheinen jetzt als zwei Lagen der neuen Erzeugenden.

Auf der Fläche ſind demnach zwei verſchiedene Syſteme von Mantellinien möglich; die zu einem Syſteme gehörigen ſind ſämmtlich einer Ebene parallel und jede Mantellinie des einen Syſtems ſchneidet alle Mantellinien des andern Syſtems. Durch jeden Punct auf der Fläche laſſen ſich

raden, denen ſie begegnen, nach einem und demſelben Verhältniß.

Digitized by Google

zwei Mantellinien legen, welche verſchiedenen Syſtemen angehören.

Die Fläche ſelbſt kann auch ohne Hülfe einer Richt-Ebene erzeugt werden, indem man einer beweglichen Geraden aufgiebt, ſtets drei Gerade zu ſchneiden, welche einer Ebene parallel ſind und paarweiſe nicht in einerlei Ebene liegen, außerdem aber beliebig gerichtet ſein mögen. Es läßt ſich nämlich (elementar) beweiſen, daß dann alle Lagen der beweglichen Geraden von ſelbſt einer neuen Ebene parallel werden. (S. Anhang, I, †.)

§. 257.

Sind die Leitenden L_1, L_2 und die Richt-Ebene E der windſchiefen Fläche gegeben, ſo iſt auch die Richt-Ebene $\mathfrak{E}$ der zweiten Erzeugung gegeben, da ſie mit L_1 und L_2 parallel ſein muß.

Um nun eine möglichſt ſymmetriſche Darſtellung der Fläche zu erhalten, wähle man das Grundſyſtem ſo, daß die Grundebenen die beiden von den Richt-Ebenen E und $\mathfrak{E}$ gebildeten Nebenwinkel halbiren. Eine Seitenebene YOZ
Fig. 107. ſteht dann ſenkrecht zu beiden Richt-Ebenen, und auf dieſe Seitenebene projiciren ſich die beiden Syſteme von Mantellinien als zwei Syſteme von Parallelen mit den Seitenſpuren der Richtebenen. Es ſeien OP″ und OQ″ dieſe Seitenſpuren (wobei alſo der Winkel P″OQ″ vom urſprünglichen Grundſchnitt OX halbirt wird); die mit OQ″ parallelen a″b″, c″d″ ſeien die S-Projectionen der Leitenden; ab, cd die zugehörigen H-Projectionen. Die S-Projection für jede Lage der Erzeugenden iſt dann parallel zu OP″. Durch die Puncte B und C, welche eine gemeinſchaftliche H-Projection b (c) haben, gehen zwei Lagen, deren S-Projectionen a″c″, b″d″ mit a″b″ und c″d″ einen Rhombus einſchließen und deren H-Projectionen in ab und cd fallen.

Die H-Projectionen ab, cd der Leitenden ſind in Fig. 107 ſo angenommen, daß ſie gleiche Neigung gegen den neuen Grundſchnitt OY haben. Dieß iſt immer erlaubt. Denn wären urſprünglich zwei Leitende gegeben ge-

Digitized by Google

weſen, welche dieſe Bedingung nicht erfüllen, ſo könnte man eine derſelben immer durch eine andere auf der windſchiefen Fläche liegende Gerade ſo erſetzen, daß obiger Bedingung nachträglich entſprochen würde. [Wäre z. B. ∠ cvw < ∠ bwv, ſo betrachte man vorerſt ſtatt der Linien (ab, a''b''), (cd, c''d'') die Linien (ac, a''c''), (bd, b''d'') als die Leitenden; dann ſtellt das erſtgenannte Paar zwei Lagen der neuen Erzeugenden vor, und eine dritte Lage erhält man, wenn man m''n'' || a''b'' zieht und (mittels §. 41) die zugehörige H-Projection mn beſtimmt. Liegt nun m''n'' ſehr nahe an a''b'', ſo wird der Winkel zwiſchen mn und OY von dem Winkel bwv äußerſt wenig verſchieden ſein, aber kleiner als dieſer (vorausgeſetzt, daß m''n'' zwiſchen a''b'' und c''d'' fällt). Man kann die Linie m''n'' zuerſt mit a''b'' zuſammenfallend denken und ſie dann ſtetig gegen c''d'' fortſchreiten laſſen; dabei wird ſich jene Neigung der mn gegen die OY ſtetig veringern und muß alſo irgend einmal dem Winkel cvw gleich werden; dieſe Lage der (mn, m''n'') würde dann der (ab, a''b'') zu ſubſtituiren und als die mit (cd, c''d'') zuſammengehörige Leitende zu nehmen ſein.]

Unter obigen Vorausſetzungen wird man nun eine gefällige Figur erhalten, wenn man a''b'' in eine beliebige Anzahl gleicher Theile a''1'', 1''2'', 2''3'', ... theilt, durch die Theilpuncte Parallelen mit OP'' zieht und für jede ſolche Parallele (als S-Projection einer Mantellinie betrachtet) die H-Projection ſucht. Die V-Projectionen aller dieſer Mantellinien ergeben ſich leicht, nachdem man die V-Projectionen a'b', c'd' der Leitenden beſtimmt hat, und ein Blick auf die Fig. 107 wird das hiebei zu beobachtende Verfahren deutlich zeigen. Die V-Projectionen a'b', c'd' haben nothwendig gleiche Neigung gegen die YOZ. *)

---

*) Ein Modell der Fläche läßt ſich in folgender Art herſtellen. Zwei gleich große, nicht in einerlei Ebene liegende (materielle) Linien AB, CD theile man in gleichviel gleiche Theile und verbinde die entſprechenden Theilpuncte durch ſtraffgeſpannte Fäden, welche von ſelbſt parallel mit einer und der-

Digitized by Google

§. 258.

Die Umhüllungscurve für die H-Projectionen der Mantellinien bildet den **horizontalen Umriß** der windſchieſen Fläche; die Umhüllungslinie der V-Projectionen iſt der **verticale Umriß.**

Jeder dieſer Umriſſe iſt eine **Parabel.** Um dieß zu beweiſen, iſt zunächſt aus den in §. 189 aufgeführten Lehrſätzen eine neue Eigenſchaft der Parabel abzuleiten.

Fig. 108. Es ſeien QP, Q𝔓 zwei Tangenten einer Parabel, deren Berührungspuncte die Endpuncte einer zur Axe ſenkrechten Sehne ſind. Dieſe Tangenten ſchneiden (wie aus §. 189 folgt) beide die Axe in demſelben Puncte Q und haben gleiche Neigung gegen dieſelbe, ſo daß alſo die Axe QF durch Halbirung des Winkels PQ𝔓 erhalten wird. Ferner ſei M𝔐 ($\perp$ QF) die Tangente, welche durch den Scheitel der Parabel geht; ſie ſchneidet die vorigen Tangenten in M und 𝔐. Zwei Senkrechte, aus M und 𝔐 auf QP und Q𝔓 errichtet, treffen die Axe QF im **Brennpuncte** F. Irgend eine neue Tangente Hℌ erhält man nun, wenn man durch F eine beliebige Gerade legt, welche der M𝔐 in G begegnet, und durch G die Hℌ $\perp$ FG führt. Verbindet man die Schnittpuncte H, ℌ mit F, ſo iſt HF der Durchmeſſer eines Kreiſes, welcher durch M und G geht (da $\angle FGH = 90° = \angle FMH$); und aus gleichem Grunde iſt Fℌ der Durchmeſſer eines durch 𝔐 und G gehenden Kreiſes. Im erſten Kreiſe ſind die Peripheriewinkel GMF und GHF gleich; im zweiten die Winkel G𝔐F und GℌF; da aber offenbar $\angle$GMF $=$ $\angle$G𝔐F, ſo iſt auch $\angle$GHF $=$ $\angle$GℌF, und mithin GH $=$ Gℌ, d. h. das zwiſchen den Tangen-

ſelben Ebene ſein werden. Dieſe Fäden ſtellen Mantellinien des einen Syſtems vor. Mantellinien des andern Syſtems erhält man, wenn man die erſte (AC) und die letzte (BD) der vorigen Mantellinien ebenfalls in gleichviel gleiche Theile theilt und wie vorhin verfährt. Jeder von den Fäden des zweiten Syſtems muß dann auf allen Fäden des erſten Syſtems aufliegen.

Digitized by Google

ten QP und Q$\mathfrak{P}$ enthaltene Stück jeder neuen Tangente wird durch die Scheiteltangente M$\mathfrak{M}$ halbirt. Fällt man nun auf M$\mathfrak{M}$ die Senkrechten HI und $\mathfrak{H}\mathfrak{J}$, ſo iſt (wegen Congruenz der Dreiecke GHI und G$\mathfrak{H}\mathfrak{J}$) $HI = \mathfrak{H}\mathfrak{J}$; ferner iſt $\angle IMH$ ($= \angle GMQ$) $= \angle \mathfrak{J}\mathfrak{M}\mathfrak{H}$; $\angle I = \angle \mathfrak{J}$ ($= 90°$); alſo $HM = \mathfrak{H}\mathfrak{M}$. Daher iſt $\mathfrak{H}Q + QH = \mathfrak{M}Q + QM = 2 \cdot MQ$, mithin conſtant für alle Lagen der Tangente H$\mathfrak{H}$. — Fällt G auf die Verlängerung der M$\mathfrak{M}$, etwa nach G_1, ſo daß ſtatt H$\mathfrak{H}$ die $H_1\mathfrak{H}_1$ erſcheint, ſo zeigt ſich eben ſo wie vorhin, daß $G_1H_1 = G_1\mathfrak{H}_1$ und $MH_1 = \mathfrak{M}\mathfrak{H}_1$; aber jetzt iſt $\mathfrak{H}_1Q - QH_1 = 2 \cdot MQ$. Nimmt man die auf den Tangenten QP, Q$\mathfrak{P}$ in den Richtungen von Q nach P und $\mathfrak{P}$ abgetragenen Stücke als poſitiv, die in entgegengeſetzter Richtung abgetragenen aber als negativ, ſo kann man allgemein ſagen: Die algebraiſche (d. i. mit Rückſicht auf die Vorzeichen genommene) Summe der beiden Stücke, welche von Q aus auf den Tangenten QP, Q$\mathfrak{P}$ durch irgend eine neue Tangente abgeſchnitten werden, iſt von conſtanter Größe.

Die Umkehrung dieſes Lehrſatzes zeigt, daß die Umhüllungslinie, auf welche die Aufg. 4 des §. 187 führt, eine Parabel ſein muß, welche die Halbirungslinie des gegebenen Winkels zur Axe hat. Aber jene Umhüllungslinie iſt identiſch mit den Curven, welche die $\mathfrak{H}$-Projectionen und die $\mathfrak{V}$-Projectionen für die Mantellinien der oben betrachteten windſchiefen Fläche umhüllen; denn in der That ändert eine ſolche Projection ſich von einer Lage zur andern ſo, daß die algebraiſche Summe der auf ba und bd (oder auf a′b′ und a′c′) abgeſchnittenen Stücke conſtant bleibt (Fig. 107.) ($ab = bI + b1 = bII + b2 = \ldots = bVII + b7 = bd = bIX - b9 = \ldots$; eben ſo $c'a' = a'1' + a'I' = a'2' + a'II' = \ldots = a'b' = a'9' - a'IX' = \ldots$). Alſo iſt ſowohl der verticale als der horizontale Umriß der windſchiefen Fläche eine Parabel; die Axen dieſer beiden Parabeln ſind die (mit dem Grundſchnitt OX parallelen) Linien Zs′a′, Ybs, welche die Winkel b′a′c′ und abd halbiren.

Digitized by Google

§. 259.

Fig. 107. Es wurden bisher nur die Mantellinien desjenigen Syſtems berückſichtigt, zu welchem die Leitenden nicht gehören. Will man auch die Mantellinien des andern Syſtems projiciren, ſo kann man durch die Puncte, in denen die b″d″ von den aus den Theilpuncten der c″d″ auf OY gefällten Senkrechten getroffen wird, Parallelen zu a″b″ ziehen (wie ſie auch wirklich in der Seitenebene gezogen ſind); die zu dieſen S-Projectionen gehörigen H- und V-Projectionen müſſen dann, wie leicht einzuſehen, auf die bereits gefundenen H- und V-Projectionen des erſten Syſtems fallen, und dieſe Projectionen (deren jede ſonach eine doppelte Bedeutung hat) ſind aus dieſem Grunde durchaus voll ausgezogen. (Würde man das zweite Syſtem der Mantellinien als nicht vorhanden betrachten, ſo hätte von den in der Figur angegebenen H- und V-Projectionen jede zum Theil punctirt werden müſſen, auf ähnliche Weiſe wie in Fig. 104).

Eine genauere Betrachtung der Fig. 107 — wie ſie im folgenden § angeſtellt werden ſoll — lehrt die in ihr dargeſtellte Fläche ſelbſt näher kennen und führt auf mehrere weſentliche Eigenſchaften derſelben.

§. 260.

a.) Die ſämmtlichen Mantellinien ſind, ſowohl in Beziehung auf die zur VE parallele Ebene Ys als auf die zur HE parallele Ebene Zs′ ſymmetriſch geordnet, woraus zu ſchließen iſt, daß die genannten beiden Ebenen zwei Hauptebenen der Fläche ſind (vgl. §. 204). Faßt man nämlich irgend zwei (zu verſchiedenen Syſtemen gehörige) Mantellinien in's Auge, deren H-Projectionen ſich auf der Linie Ys ſchneiden, z. B. die Linien (3 III, 3′III′) und (V5, 3′III′), ſo ſteht die Ebene dieſer Linien ſenkrecht auf der verticalen Ebene Ys; letztere halbirt den Winkel beider Linien und mithin auch jede Sehne, welche in der Ebene der Linien ſenkrecht zur Ebene Ys gezogen werden kann. Eben ſo ſteht die Ebene der Linien (3 III, 3′III′) und (3 III, V′5′) ſenkrecht auf der horizontalen Ebene Zs′; letz-

Digitized by Google

tere halbirt den Winkel jener Linien und alſo jede Sehne, welche man in erſterer ſenkrecht zur HE ziehen kann.

Die Umriſſe der Fläche ſind die Projectionen der beiden Curven, in denen die Hauptebenen die Fläche ſchneiden; die Peripherie des {horizontalen / verticalen} Umriſſes enthält die {H / V}-Projectionen der Puncte, in welchen die {horizontale / verticale} Hauptebene von den Mantellinien getroffen wird.

b.) Man zeichne die H-Spur EFGF₀E₀ . . . der Fläche, (indem man die H-Spuren der einzelnen Mantellinien ſtetig verbindet). Schneidet man hierauf die Fläche durch eine horizontale Ebene e′g′, welche von Zs′ die nämliche Entfernung hat wie dieſe von der HE, ſo läßt ſich aus (a) folgern, daß der Schnitt dieſer Ebene der H-Spur congruent ſein und ſich auf dieſe horizontal projiciren muß.

c.) Die Fläche wird durch die in der Zeichnung angegebenen Mantellinien in eine Anzahl windſchiefer Vierecke zerlegt. — Die Flächenpuncte, welche ſich durch die Durchſchnitte der Mantellinien ſichtbar machen, liegen reihenweiſe ſowohl in Ebenen, welche parallel zur HE, als auch in ſolchen, welche parallel zur VE ſind; denn die S-Projectionen dieſer Puncte liegen reihenweiſe in Parallelen zu OY und OX. Daher müſſen auch die V-Projectionen und die H-Projectionen der Flächenpuncte reihenweiſe in Parallelen zu OX liegen.

d.) Den verticalen Umriß der Fläche erhält man mit hinreichender Genauigkeit, wenn man eine ſtetige Curve zeichnet, welche die V-Projectionen der Mantellinien berührt. Man kann aber auch leicht die einzelnen Berührungspuncte ſelbſt beſtimmen. Um z. B. den Punct zu erhalten, in welchem die Projection II′2″ den Umriß berührt, bemerke man, daß dieſer Punct des Umriſſes die V-Projection desjenigen Punctes iſt, in welchem die Mantellinie (II2, II′2″) die verticale Hauptebene Ys ſchneidet. Die S-Spur dieſer Hauptebene iſt Ys″, alſo u″ (wo Ys″ die II″2″ trifft) die S-Projection jenes Schnittpunctes; u″ gehört zur Reihe derjenigen Puncte, welche in eine durch IV″ gelegte Parallele zu OY fallen (vgl. c), daher muß die zugehörige V-Projection u′ in einer durch IV′ gehenden Parallelen zu OX liegen; da aber unter den

Reihe der Puncte, welche dieſer Parallelen entſprechen, auch der Schnitt von I'1' und III'3' iſt, ſo hat man folgende Regel: Um auf einer Tangente des Umriſſes den Berührungspunct zu finden, ziehe man durch den Punct, wo die vorausgehende und die nachfolgende Tangente ſich ſchneiden, eine Parallele zu OX, dann trifft dieſe in den geſuchten Punct.

Dieſe nämliche Regel gilt auch, wenn es ſich um den horizontalen Umriß handelt. Denn um z. B. den Berührungspunct t auf 7VII zu erhalten — d. h. die H-Projection des Punctes, wo die (7 VII, 7'VII') die horizontale Hauptebene Zs' trifft, deren S-Spur a''s'' iſt — kann man die S-Projection t'' dieſes Punctes aufſuchen, und die auf OY ſenkrechte (oder zu OX parallele) t''t wird dann durch VI gehen.

Übrigens hätte ſich auch u' aus der zugehörigen H-Projection u (dem Schnitte der II2 und Ys) finden laſſen, und eben ſo t aus der zugehörigen V-Projection t' (dem Schnitte der 7'VII' und Zs').

o.) Die Stücke, in welche irgend eine Mantellinie des einen Syſtems durch die Mantellinien des andern Syſtems getheilt wird, ſind von gleicher Größe, da die S-Projectionen dieſer Stücke gleichgroß ſind; dasſelbe muß alſo auch für die H- und V-Projectionen derſelben gelten. — Man hat dadurch ein Mittel, Mantellinien zu projiciren ohne unmittelbare Hülfe der urſprünglichen Leitenden. Trägt man z. B. auf der Verlängerung von 4IV eine Anzahl der gleichen Stücke ab, in welche die 4IV durch die von ihr geſchnittenen projicirten Mantellinien zerlegt wird, und verfährt eben ſo in Beziehung auf eine zweite Linie 6VI, ſo hat man nur die aufeinanderfolgenden neuen Theilpuncte der verlängerten 4IV und 6VI zu verbinden, um eine Anzahl horizontal projicirter Mantellinien zu erhalten; und ähnlich verhält ſich's in der VE. Auf dieſe Weiſe wurden in der That in Fig. 107 alle diejenigen Projectionen von Mantellinien gefunden, welche die projicirten Leitenden nicht mehr innerhalb des Zeichnungsraums treffen.

Digitized by Google

f.) Die H-Spur einer zur VE parallelen Ebene gehe durch VI; dann geht ſie zugleich auch (nach c) durch die H-Projectionen h, i, k, l, t einer Anzahl von Puncten, in denen jene Ebene die windſchiefe Fläche ſchneidet; die zugehörigen V-Projectionen h′, i′, k′, l′, t′, l′ … h′ beſtimmen eine krumme Linie. Durch eine dieſer V-Projectionen, etwa durch l′, lege man eine Parallele zu OX, welche zugleich (nach c) durch andere V-Projectionen IV′, r′, u′ von Flächenpuncten gehen muß. Nun iſt $IV'l' = \alpha'VI'$ (wegen Congruenz der Dreiecke IV′l′V′ und VI′α′V′, welche zum Theil aus [e] folgt); aus gleichem Grunde $\alpha'VI' = \beta't'$, alſo $IV'l' = \beta't'$. Ganz auf dieſelbe Weiſe zeigt ſich, daß $IV'r' = \beta'\gamma'$, $r'u' = \gamma's'$, und durch Addition der gleichen Stücke folgt $l'u' = t's'$. Rückt man daher die Curve h′t′h′ parallel vorwärts, ſo daß die Puncte t′ und l′ in den (zu OX parallelen) Geraden t′s′ und l′u′ fortſchreiten, ſo muß in dem Augenblicke, wo t′ in s′ fällt, auch l′ in u′ fallen, d. h. der Punct l′ kommt mit dem Puncte t′ *zu gleicher Zeit* in der Peripherie des verticalen Umriſſes an. Was aber ſo eben für den Punct l′ bewieſen wurde, muß offenbar in derſelben Weiſe auch für die Puncte h′, i′, k′, … gelten, ſelbſt dann noch, wenn (in Folge unendlicher Verkürzung und Vervielfältigung der auf den Leitenden abgenommenen gleichen Stücke) dieſe Puncte einander unendlich nahe rücken; woraus man erſieht, *daß die Curve h′t′h′ dem verticalen Umriß der windſchiefen Fläche congruent iſt.* — Läßt man die mit der VE parallele Ebene ht ſtatt durch VI durch irgend einen andern Theilpunct der Linie bd (oder auch der Linie ab) gehen, ſo muß man durch die nämlichen Schlüſſe wieder zu demſelben Reſultate kommen; dabei können jene Theilpuncte auch in unendlicher Anzahl (und mithin unendlich nahe beiſammen) gedacht werden. Demnach ſchneiden alle möglichen zur VE parallelen Ebenen die Fläche *in congruenten Parabeln*, deren Axen parallel ſind und deren Scheitel auf dem Schnitte der horizontalen Hauptebene liegen, nämlich auf der Parabel (st, s′t′).

Alle dieſe paraboliſchen Schnitte laſſen ſich als Lagen

einer erzeugenden Parabel betrachten, deren Scheitel auf der feſten Parabel (st, s't') fortrückt, während ihre Axe immer parallel mit der Axe der letztern und ihre Ebene ſenkrecht auf der Ebene der letztern iſt, wobei die Concavitäten beider Parabeln nach verſchiedenen Seiten gekehrt ſind; folglich iſt die bisher betrachtete windſchiefe Fläche keine andere, als das hyperboliſche Paraboloid (§. 236, 7).

g.) Aus der Congruenz der Parabeln h't'h' und g's'g' folgt noch, daß die Entfernung des Scheitels t' von der Sehne h'h' gleich der Entfernung des Scheitels s' von g'g' iſt, alſo auch th = sG, auf welchen Punct des horizontalen Umriſſes auch t fallen möge. Es zeigt ſich dadurch, daß die H-Spur des Paraboloids dem horizontalen Umriß congruent ſein muß. Nun iſt aber die Entfernung der HE von der Hauptebene Z's't' willkührlich genommen; daher müſſen alle Schnitte, welche auf dem Paraboloid durch horizontale Ebenen hervorgebracht werden, der Parabel (st, s't') congruent ſein, und hieraus läßt ſich ſchließen, daß man das Paraboloid auch erzeugen kann, wenn man die Parabel (Gs, g's'g') als die feſte und die Parabel (st, s't') als die bewegliche annimmt *).

Kugel-Conoid.

§. 261.

Eine Gerade ſoll eine gegebene Gerade ſchneiden, eine gegebene Kugel berühren und mit einer gegebenen Richt-Ebene parallel ſein; dann iſt ihr geometriſcher Ort eine windſchiefe Fläche, welche man ein Kugel-Conoid nennen kann (vgl. §. 250, 4). — Man nehme die Richt-Ebene als
Fig. 109. HE; die Projectionen der leitenden Geraden ſeien Ab, a'b'; die Umriſſe der Kugel ſind zwei Kreiſe, mit dem Kugel-

*) Man hätte alſo auch in Fig. 100, wo (tvt_0, v't') die feſte Parabel vorſtellte, dieſe als die bewegliche und dafür die (wv, w'v'w'') als die feſte anſehen können, und würde dennoch wieder die nämliche Fläche erhalten haben.

halbmeſſer um die Projectionen o, o' des Kugelmittelpunctes beſchrieben.

Irgend eine zur HE parallele Ebene, deren V-Spur c't'm' iſt, ſchneidet die (Ab, a'b') in (c, c') und die Kugel nach einem Kreiſe vom Halbmeſſer m't'. Die aus c an die H-Projection dieſes Kreiſes gehenden Tangenten ct_1, ct_2 ſind die H-Projectionen für zwei Lagen der Erzeugenden; die zugehörigen V-Projectionen liegen in c't'; die Berührungspuncte auf der Kugel ſind (t_1, t'), (t_2, t').

Auf die nämliche Art kann man beliebig viele Paare von Mantellinien projiciren. Die Umhüllungslinie ihrer H-Projectionen iſt der horizontale Umriß der windſchiefen Fläche; der verticale Umriß wird durch die mit dem Grundſchnitt parallelen Tangenten des verticalen Kugelumriſſes gebildet, und dieſe Tangenten ſtellen zugleich die V-Projectionen zweier Mantellinien vor, deren H-Projectionen durch o gehen müſſen. — Die Puncte, in denen die einzelnen Mantellinien die Kugel berühren, beſtimmen eine ſtetige Curve, nach welcher die Kugel vom Conoid berührt wird *).

Die Fläche durchſchneidet ſich ſelbſt in der Geraden AB.

§. 262.

Übungsaufgaben.

1.) Das ſenkrechte Conoid (vgl. §. 250, 2) darzuſtellen, für welches als Richtebene die HE und als Leitcurve ein in der VE gezeichneter Kreis genommen wird, durch deſſen Mittelpunct zugleich die V-Projection der leitenden Geraden gehen ſoll.

2.) Die Ebenen zweier gleichen Kreiſe ſind parallel zur VE; ihre Mittelpuncte liegen in der HE; die Verbindungslinie dieſer Mittelpuncte wird von einer Geraden L

*) Die Mantellinien hat man ſich, um ein vollſtändiges Bild der Fläche zu erhalten, über dieſe Curve hinaus fortgeſetzt zu denken; dieſe Verlängerungen ſind aber in Fig. 109 weggelaſſen, weil durch das Sichtbarwerden eines Theils der Kugel die Darſtellung an Deutlichkeit gewinnt.

halbirt, welche ſenkrecht auf dem Grundſchnitt ſteht (alſo ganz in der HE liegt). Man ſoll die windſchiefe Fläche darſtellen, deren Erzeugende die beiden Kreiſe auf einerlei Seite der HE ſchneidet und zugleich der Geraden L begegnet [vgl. §. 250, 1] *).

3.) Eine Gerade, welche eine gegebene Schraubenlinie in zwei Puncten ſchneidet, verändert ihre Lage ſo, daß die Entfernung der Schnittpuncte einen conſtanten Werth behält, der aber kleiner als die Ganghöhe ſein ſoll (vgl. §. 250, 8).

Schraubenfläche.

§. 263.

Wenn das Wort Schraubenfläche ohne nähere Bezeichnung gebraucht wird, verſteht man darunter nicht die in §§. 247—249 betrachtete Fläche, ſondern eine windſchiefe Fläche, deren Erzeugung auf mehrere (jedoch nicht weſentlich verſchiedene) Arten vor ſich gehen kann.

a.) Die Schraubenfläche wird von einer beweglichen Geraden beſchrieben, welche auf einer gegebenen Schraubenlinie aufliegt und zugleich die Axe dieſer Schraubenlinie unter einem gegebenen Winkel φ ſchneidet (vgl. §. 250, 7). Die Axe der Schraubenlinie iſt auch Axe für die Fläche.

Denkt man ſich aus dem Puncte, in welchem die Erzeugende die Schraubenlinie trifft, eine Senkrechte auf die Axe gefällt, ſo bildet ſich ein rechtwinkeliges Dreieck, welches das zwiſchen der Schraubenlinie und ihrer Axe enthaltene Stück der Erzeugenden zur Hypotenuſe hat. Dieſes Dreieck bleibt für alle Lagen der Erzeugenden immer das nämliche, weil in ihm die auf der Axe ſenkrechte Kathete (d. i. der Halbmeſſer des Schraubencylinders) und der Gegenwinkel dieſer Kathete (d. i. die Neigung φ der Erzeugenden gegen die Axe) conſtant ſind. Man hätte daher

*) Was für eine Fläche würde ſich bilden, wenn die Erzeugende die Kreiſe immer auf entgegengeſetzten Seiten der HE ſchnitte?

Digitized by Google

auch das Entſtehungsgeſetz der Schraubenfläche auf folgende Arten ausſprechen können:

b.) Die Erzeugende ſchneidet eine Schraubenlinie und ihre Axe, und bewegt ſich ſo, daß das durch die beiden Schnittpuncte begrenzte Stück von unveränderlicher Größe bleibt (vgl. §. 250, 8); oder auch;

c.) Die Schraubenfläche wird durch die (verlängerte) Hypotenuſe eines rechtwinkeligen Dreiecks erzeugt, deſſen eine Kathete ſich in einer geraden Linie fortſchiebt, während zugleich um dieſe Gerade die Ebene des Dreiecks ſich proportional mit der Fortſchreitung jener Kathete dreht.

§. 264.

Man zeichne die Projectionen Ab.., a′b′b″.. der Schraubenlinie, indem man ihre Axe ſenkrecht zur HE annimmt. Die mit dem Grundſchnitt parallele OA iſt die H-Projection einer mit der VE parallelen Mantellinie, deren V-Projection man erhält, wenn man $\angle$ o′a′z′ $= 90° - \varphi$ macht. (Es ſtellt dann zugleich o′a′z′ die wahre Geſtalt und Größe des conſtanten Dreiecks vor, durch deſſen Bewegung nach §. 263, c die Schraubenfläche ſelbſt erzeugt werden kann.) Fig. 110.

Betrachtet man eine beliebig durch O gelegte Gerade Ob als H-Projection einer Mantellinie, ſo findet man die zugehörige V-Projection b′n′ auf folgende Weiſe. Man ſuche die V-Projection b′ des Punctes, in welchem die Mantellinie die Schraubenlinie trifft, fälle b′m′ $\perp$ o′o″, mache m′n′ = o′z′ und ziehe b′n′. Da aber zu b außer b′ noch unendlich viele Puncte (z. B. b″) als V-Projectionen gehören können, ſo giebt es auch unendlich viele Mantellinien, denen Ob als gemeinſchaftliche H-Projection zukommt; für jede derſelben würde man die V-Projection wie vorhin finden, und alle dieſe V-Projectionen ſind, wie leicht zu zeigen, unter ſich parallel (z. B. b″n″ $\parallel$ b′n′).

Auf dieſe Weiſe kann man, indem man der Linie Ob nach und nach andere Lagen giebt, beliebig viele Mantellinien der Fläche projiciren. Um aber der Darſtellung eine gewiſſe Regelmäßigkeit zu geben, thut man am beſten, zu-

Digitized by Google

erſt die H-Projection Ab.. der Schraubenlinie in n gleiche Theile zu theilen und die nach den Theilpuncten gezogenen Radien als die Lagen einzelner Mantellinien gelten zu laſſen. Hat ſich nun bei der Bewegung des Dreiecks AOZ der Punct A um $\frac{1}{n}$ der Ganghöhe h erhoben, ſo daß jetzt ſeine H-Projection in den erſten auf A folgenden Theilpunct des Kreiſes Ab.. fällt, ſo iſt auf der Schraubenaxe ſowohl der Punct O als der Punct Z um $\frac{1}{n}$h aufwärts gerückt; fällt bei weiterem Fortſchreiten die H-Projection von A in den zweiten Theilpunct, ſo liegt z′ um $\frac{2}{n}$h höher als zu Anfang; u. ſ. f. Man wird daher auf o′o″ von z′ aufwärts das Stück $\frac{1}{n}$h beliebig oft abtragen und die auf dieſe Art in o′o″ erhaltenen Puncte in gehöriger Aufeinanderfolge mit denjenigen Puncten verbinden, welche auf der V-Projection der Schraubenlinie den Theilpuncten des Kreiſes Ab.. entſprechen; die Verbindungslinien geben die V-Projectionen der Mantellinien und die Umhüllungscurven derſelben beſtimmen den verticalen Umriß *).

Hiebei iſt nicht zu überſehen, daß ſchon behufs der Conſtruction der Schraubenlinie ſowohl der Kreis Ab.. als die auf o′o″ abgetragene Ganghöhe in gleiche Theile getheilt werden mußten. Läßt nun der Werth von φ es zu, daß die erſte Lage von z′ in einen der Theilpuncte fällt, welche für jenen frühern Zweck bereits auf o′o″ angenommen ſind, ſo wird die Ausführung der Zeichnung ſehr einfach. (So verhält ſich's in Fig. 110; es iſt dort $n = 14$ und $o'z' = \frac{6}{14}$h.)

Um ein klares und überſichtliches Bild zu erhalten,

*) Da die H-Projectionen zweier aufeinanderfolgenden Mantellinien ſich in O ſchneiden und von O aus divergiren, die V-Projectionen dagegen die o′o″ in zwei verſchiedenen Puncten treffen müſſen, ſo wird recht augenfällig, daß dieſe Mantellinien nicht in einerlei Ebene liegen können, und daß alſo die Schraubenfläche windſchief iſt.

wurde in Fig. 110 die Erzeugende begrenzt angenommen, mithin nur ein begrenzter Theil der Schraubenfläche zur Anſchauung gebracht. Zum Begriffe der vollſtändigen (unbegrenzten) Schraubenfläche wird erfordert, daß man ſich die Erzeugende nach beiden Seiten hin ohne Ende verlängert denkt.

§. 265.

In §. 263, c wurde eine Erzeugungsart der Schraubenfläche angegeben, bei welcher die Schraubenlinie nicht zum Voraus gegeben zu ſein braucht, ſondern vielmehr gleichzeitig mit der Fläche ſelbſt entſteht. Läßt man nämlich das Dreieck AOZ auf die dort näher beſtimmte Weiſe ſich bewegen, ſo beſchreibt, während die Hypotenuſe AZ die Schraubenfläche erzeugt, der Punct A die Schraubenlinie (ſ. Anmerk. zu §. 209). Die Ganghöhe iſt der Weg, welcher vom Puncte Z (oder auch vom Puncte O) bis zu dem Augenblick zurückgelegt worden iſt, wo die Ebene des Dreiecks eine Drehung von 360° vollendet hat. Aber nicht nur der Punct A, ſondern überhaupt jeder beliebige Punct der Hypotenuſe AZ wird dabei eine Schraubenlinie beſchreiben, und alle dieſe Schraubenlinien haben offenbar außer der Axe noch die Ganghöhe gemein. Der Cylinder jeder ſolchen Schraubenlinie hat als Halbmeſſer ſeines Grundkreiſes die Entfernung des beſchreibenden Punctes von der gemeinſchaftlichen Axe OO″ und der Grundkreis ſelbſt (oder die H-Projection der Schraubenlinie) iſt ein mit Ab.. concentriſcher Kreis. Hieraus kann man umgekehrt ſchließen, daß eine auf der Schraubenfläche liegende Curve, deren H-Projection ein Kreis um O iſt, eine Schraubenlinie ſein muß, oder daß eine Reihe gerader Cylinder, welche zur gemeinſchaftlichen Axe die Axe der Schraubenfläche haben, dieſe Fläche in concentriſchen Schraubenlinien von gleichen Ganghöhen ſchneiden. *) Fig. 110.

*) Es ergiebt ſich aus obigem Satze noch eine vierte Art, die Schraubenfläche zu erzeugen, nämlich durch eine Gerade, welche beſtändig die entſprechenden Umgänge zweier concen-

Außer der urſprünglichen Schraubenlinie (Ab.., a'b'b''..) iſt in Fig. 110 noch eine zweite gezeichnet. Die V-Projection derſelben wurde dadurch gefunden, daß man (nach §. 41) die V-Projectionen für diejenigen Puncte der Mantellinien ſuchte, deren H-Projectionen in den mit Oq um O beſchriebenen Kreis fallen.

Die V-Projectionen aller auf der Schraubenfläche liegenden concentriſchen Schraubenlinien werden von dem verticalen Umriß der Fläche berührt; denn jede dieſer V-Projectionen muß von der V-Projection irgend einer Mantellinie berührt werden.

§. 266.

Ein beſonderer Fall der Schraubenfläche ergiebt ſich, wenn man bei der in §. 263, a angegebenen Erzeugungsart $\varphi = 90°$ ſetzt. Dann bleibt die Erzeugende ſtets parallel mit einer zur Axe ſenkrechten Ebene (der HE), und die erzeugte Fläche — welcher man in dieſem Falle auch den Namen *Wendelfläche* beilegt — gehört alſo unter die *ſenkrechten Conoide* (§. 250, 2).

Nach §. 263, b wird man die Wendelfläche erhalten, wenn das conſtante Stück der Erzeugenden dem Halbmeſſer des Schraubencylinders gleich iſt.

Die in §. 263, c aufgeführte Erzeugungsart unterliegt hier einer Abänderung, indem die Hypotenuſe des zur Erzeugung benützten Dreiecks mit ſeiner horizontalen Kathete zuſammenfällt. Man wird dadurch auf die Anmerkung zu §. 209 zurückgeführt und ſieht ſogleich, daß die Wendelfläche durch jene Gerade erzeugt wird, deren Endpunct dort die Schraubenlinie beſchrieb. Zugleich fällt in die Augen, daß überhaupt *jeder* Punct der genannten Geraden eine Schraubenlinie beſchreiben muß und daß alſo die in §. 265 allgemein ausgeſprochenen Sätze auch für die Wendelfläche gelten.

---

triſchen Schraubenlinien von gleicher Ganghöhe ſchneidet und zugleich der gemeinſchaftlichen Axe beider Schraubenlinien begegnet (vgl. §. 250, 1).

Schrauben.

§. 267.

(**Die Schraube mit dreieckigem Gewinde.**) — Auf dem Cylinder einer Schraubenlinie nehme man das zwiſchen zwei aufeinanderfolgenden Umgängen enthaltene Stück einer Mantellinie als die Baſis eines gleichſchenkeligen Dreiecks an, deſſen Ebene durch die Axe des Cylinders geht. Dieſe Ebene drehe man um die Axe und laſſe dabei die Baſis immer zwiſchen den Schraubengängen fortrücken; dann beſchreibt der Flächenraum des Dreiecks einen Körper, welchen man ein dreieckiges Schraubengewinde nennt. Dieſes Gewinde in feſter Verbindung mit jenem Cylinder bildet eine Schraube, und der Cylinder für ſich heißt die Spindel derſelben.

Denkt man ſich die beiden gleichen Seiten des erzeugenden Dreiecks bis zur Schraubenaxe verlängert, ſo ſieht man, daß ſie Schraubenflächen erzeugen, oder daß die Begrenzungsflächen des Schraubengewindes Stücke von Schraubenflächen ſind. Die Spitze des Dreiecks beſchreibt (nach §. 265) eine Schraubenlinie von derſelben Ganghöhe und derſelben Axe wie die urſprüngliche; letztere heißt die einſpringende und erſtere die ausſpringende Schärfe der Schraube.

Um eine ſolche Schraube zu zeichnen, wenn ihre Spindel ſenkrecht auf der HE ſteht, projicire man zuerſt die urſprüngliche Schraubenlinie ($a\alpha, \alpha_2$ .., $a'\alpha^I\alpha^{II}b'\beta^I$ ..) und zeichne das erzeugende Dreieck in einer zur VE parallelen Stellung, für welche $a'b'c'$ ſeine V-Projection ſei. Die H-Projection c der Dreiecksſpitze führt dann auf die H-Projection $c\gamma, \gamma_2$ ... der äußern Schraubenlinie (der ausſpringenden Schärfe), und da deren Ganghöhe = $a'b'$ iſt, ſo kann man auch ihre V-Projection $c'\gamma^I\gamma^{II}$ ... zeichnen *). Will Fig. 111.

*) Hat man die H-Projection der innern Schraubenlinie (und alſo auch die Ganghöhe $a'b'$) in eine gerade Anzahl gleicher Theile getheilt, ſo trifft eine durch c' gehende Parallele mit dem Grundſchnitt in einen Theilpunct der $a'b'$, und man kann dann mittels der auf $a'x'$ (oder $m'o'$) aufgetragenen

man nun irgend eine Lage des erzeugenden Dreiecks projiciren, ſo ziehe man durch o eine beliebige Gerade $\alpha(\beta)\gamma$, betrachte ſie als H-Projection des Dreiecks, und ſuche auf $a'\alpha^{I}b'\beta^{I}$.. und $c'\gamma^{I}$.. die zu α (β) und γ gehörigen V-Projectionen; die Verbindung dieſer drei Puncte giebt die V-Projection des Dreiecks.

Der verticale Umriß des Schraubengewindes beſteht aus Curvenſtücken von der Art, wie man ſie in Fig. 110 (§. 264) als Vertical-Umriß der Schraubenfläche fand, und dieſe Curvenſtücke müſſen die V-Projectionen zuſammengehöriger Umgänge der innern und äußern Schraubenlinie berühren (§. 265, zu Ende). Da aber die Krümmung dieſer Curven um ſo unbedeutender wird, je mehr ſie ſich von der v-projicirten Schraubenaxe entfernen, und in größerer Entfernung kaum mehr durch Zeichnung bemerkbar zu machen iſt, ſo kann man in den meiſten Fällen für den Umriß des Gewindes ohne merklichen Fehler eine gerade Linie ſetzen, alſo eine gemeinſchaftliche Tangente der beiden v-projicirten Schraubenlinien (wie $U^{I}, U^{II}, U^{III}, U^{IV}, \ldots$; a′b′ und b′c′ aber gehören nicht zum Umriß). Nur dann würde man mit dieſer Näherung nicht mehr ausreichen, wenn der Durchmeſſer der Schraubenſpindel in Vergleich mit dem Durchmeſſer des äußern Schraubencylinders ſehr klein wäre.

§. 268.

(**Die Schraube mit viereckigem Gewinde.**) — Die eine Seite AB eines Rechtecks ABCD liege in einer Mantellinie eines geraden Cylinders, während die Ebene des Rechtecks durch die Axe des Cylinders geht. Dreht man dieſe Ebene um die Axe und läßt zugleich den Punct A auf der Cylinderfläche in einer Schraubenlinie fortſchreiten, deren

---

Theilpuncte nicht nur die V-Projection der innern, ſondern zugleich auch die der äußern Schraubenlinie conſtruiren; die Theilpuncte des Kreiſes c . . . werden bei dieſer Annahme durch die Verlängerungen derjenigen Radien beſtimmt, welche von o aus nach den Theilpuncten des Kreiſes a . . . gehen.

Digitized by Google

Ganghöhe > AB iſt, ſo erzeugt der Flächenraum des Rechtecks ein viereckiges Schraubengewinde, deſſen Spindel jener Cylinder iſt. Dabei beſchreiben die Seiten AD, BC zwei Wendelflächen (§. 266) und die Puncte C, D zwei congruente Schraubenlinien, welche mit der urſprünglichen (von A durchlaufenen) einerlei Ganghöhe haben; der Punct B aber beſchreibt eine vierte Schraubenlinie, welche der urſprünglichen congruent iſt.

Dieſe Schraube läßt ſich (bei verticaler Stellung ihrer Spindel) leicht auf der VE abbilden. Hat man die Projectionen $a\alpha$.., $a'\alpha'$... der urſprünglichen Schraubenlinie und die V-Projection $a'b'c'd'$ des erzeugenden Rechtecks für eine zur VE parallele Lage gezeichnet, ſo findet man ſogleich die gemeinſchaftliche H-Projection $c\gamma$.. der von C und D beſchriebenen Schraubenlinien. Nimmt man eine beliebig durch o gelegte Gerade $a\gamma$ als H-Projection für irgend eine neue Lage des Rechtecks, fällt $\alpha\alpha'\beta' \perp GS$, macht $\alpha'\beta' = a'b'$, $\beta'\gamma' \parallel \alpha'\delta' \parallel GS$, $\gamma\delta''\gamma' \perp GS$, ſo iſt $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ die zugehörige V-Projection. Auf dieſe Art ergeben ſich die V-Projectionen für beliebig viele Lagen des Rechtecks. Die ſtetigen Curven $b'\beta'$..., $c'\gamma'$..., $d'\delta'$... geben die V-Projectionen der drei von B, C, D beſchriebenen Schraubenlinien an. Dieſe Schraubenlinien laſſen ſich aber auch leicht unmittelbar projiciren, da man ihre H-Projectionen und ihre Ganghöhe kennt. Fig. 112.

Drittes Kapitel.

Berührung krummer Flächen durch gerade Linien und Ebenen.

§. 269.

Eine Gerade berührt eine krumme Fläche, wenn ſie eine auf der Fläche gezogene Curve berührt.

Digitized by Google

Die Aufgabe, durch einen gegebenen Punct A einer Fläche eine Tangente an ſie zu legen, iſt (mit einer einzigen in §. 270 namhaft gemachten Ausnahme) eine unbeſtimmte, da durch jenen Punct unendlich viele Curven auf der Fläche gezogen werden können.

Um von einem Puncte P außerhalb einer krummen Fläche eine Tangente an ſie zu legen, hat man die Fläche durch eine Ebene zu ſchneiden, welche durch P geht, und an die Schnittcurve eine Tangente aus P zu ziehen. Da man jene Schnittebene auf unendlich verſchiedene Arten durch P legen kann, ſo erhält man unendlich viele Tangenten, welche zuſammen eine *Kegelfläche* bilden, während ihre Berührungspuncte auf der krummen Fläche eine ſtetige Curve beſtimmen. Man ſagt, ein ſolcher Kegel ſei der Fläche von P aus *umſchrieben*.

Soll eine Tangente einer krummen Fläche parallel mit einer gegebenen Geraden G ſein, ſo kann ſie wieder unendlich viele Lagen haben; denn man kann die Fläche durch unendlich viele Ebenen ſchneiden, welche alle durch G gehen, und die mit G parallele Tangente jeder Schnittcurve giebt eine Lage ab. Alle dieſe Lagen der Flächentangente beſtimmen eine *Cylinderfläche* und ihre Berührungspuncte eine ſtetige Curve. Der Cylinder iſt der Fläche parallel mit G *umſchrieben*.

Eben ſo hat man es mit einer unbeſtimmten Aufgabe zu thun, wenn man an eine krumme Fläche eine Tangente parallel mit einer gegebenen Ebene E legen ſoll. Denn alle möglichen Tangenten einer Curve, nach welcher die krumme Fläche von einer mit E parallelen Ebene geſchnitten wird, genügen der Aufgabe, und eine ſolche Parallelebene kann ſelbſt wieder unendlich viele Lagen haben. *)

*) Die letzte Aufgabe würde ſelbſt dann nicht beſtimmt ſein, wenn man der verlangten Tangente noch außerdem die Bedingung ſtellte, irgend eine gegebene Curve zu ſchneiden; ihr geometriſcher Ort wäre dann irgend eine *windſchiefe Fläche* (§. 250, 4).

Digitized by Google

§. 270.

Der geometriſche Ort einer Geraden, welche eine krumme Fläche in einem gegebenen Puncte A berührt, iſt im Allgemeinen eine Ebene. Denn würden die ſämmtlichen durch A gehenden Tangenten nicht in einer Ebene liegen, ſo müßten ſie eine Kegelfläche bilden, welche A zur Spitze hätte; jede Kegelfläche aber muß von einer durch ihre Spitze gelegten Ebene nach mehreren Geraden geſchnitten werden können *); daher müßte eine Curve C, nach welcher eine durch A gehende Ebene die gegebene krumme Fläche ſchneidet, im Puncte A mehrere Tangenten zulaſſen, was im Allgemeinen nicht der Fall iſt und nur dann möglich wäre, wenn der Punct A einen mehrfachen Punct der Curve C abgäbe. Man ſieht hieraus, daß für jeden gewöhnlichen Punct einer krummen Fläche die durch ihn gehenden Tangenten eine Ebene beſtimmen, und dieſe nennt man eine Berührungsebene. Allerdings aber kann ſtatt der Berührungsebene ein Berührungskegel auftreten, wenn der Berührungspunct ein beſonderer Punct der Fläche iſt, nämlich ein ſolcher, welcher für jede durch ihn gehende und auf der krummen Fläche liegende ebene Curve einen mehrfachen Punct vorſtellt. In einem ſolchen Falle bildet die Fläche in dem erwähnten Puncte eine trichterförmige Einſenkung. **) Eine ähnliche Einſenkung kann auch in der Art ſtatt finden, daß der tiefſte Punct derſelben ein Rückkehrpunct aller der ebenen Curven iſt, welche man durch ihn auf der krummen Fläche ziehen kann ***), und

*) Irgend zwei Mantellinien einer Kegelfläche kann man immer als ſolche Schnitte betrachten; die durch ſie beſtimmte Ebene kann aber für gewiſſe Formen der Kegelfläche zugleich auch noch andere Mantellinien enthalten.

**) Ein Beiſpiel liefert die Fläche, welche durch Drehung eines Kreiſes um eine Sehne entſteht.

***) Man denke ſich z. B. eine mit einem Rückkehrpuncte verſehene Curve um die Tangente dieſes Rückkehrpunctes gedreht.

Digitized by Google

unter dieſen Umſtänden giebt es für den genannten Punct nur eine einzige Tangente der krummen Fläche.

Schneidet eine krumme Fläche ſich ſelbſt nach irgend einer Curve, ſo wird es für jeden Punct dieſer Curve mehrere Berührungsebenen der Fläche geben, indem jedem Flächenmantel ſeine beſondere Berührungsebene zukommt.

†) Der obigen Erklärung von einer Berührungsebene entſpricht als Umkehrung der Lehrſatz: Wird eine krumme Fläche F von einer Ebene E im Puncte A berührt, und irgend eine andere durch A gelegte Ebene ſchneidet die F in der Curve f, die E in der Geraden e, ſo iſt e eine Tangente der f und A ihr Berührungspunct.

§. 271.

Eine Normale einer krummen Fläche iſt eine Gerade, welche auf einer Berührungsebene im Berührungspuncte ſenkrecht ſteht.

Zwei krumme Flächen berühren ſich, wenn ſie einen gemeinſchaftlichen Punct und für dieſen die Berührungsebene oder die Normale gemein haben *).

---

*) Es wurde in §. 240 bereits vorläufig erwähnt, daß eine Umhüllungsfläche jede Lage der umhüllten Fläche nach der betreffenden Characteriſtik berührt, und die oben gegebene Erklärung beſtätigt dieſen Satz. Die Characteriſtik liegt nämlich ſowohl auf der umhüllten als auf der umhüllenden Fläche, und irgend eine Tangente der Characteriſtik iſt alſo eine gemeinſchaftliche Tangente beider Flächen; ferner beſchreibt der Berührungspunct einer ſolchen Tangente beim Übergange der Characteriſtik in ihre unendlich nahe Nachbarlage einen unendlich kleinen Weg oder ein Curvenelement, welches auf beiden Flächen zugleich liegt und deſſen Verlängerung demnach eine zweite gemeinſchaftliche Tangente iſt. Folglich entſpricht beiden Flächen für jeden Punct der Characteriſtik eine gemeinſchaftliche Berührungsebene, oder die Flächen berühren ſich in allen Puncten der Characteriſtik.

Digitized by Google

A.) Berührungsebenen bei gegebenem Berührungspuncte.

§. 272.

Es ſoll hier zunächſt die Aufgabe behandelt werden, an eine gegebene krumme Fläche eine Berührungsebene durch einen auf der Fläche gegebenen Punct zu legen, wobei immer vorausgeſetzt wird, daß der gegebene Berührungspunct ein gewöhnlicher Punct der Fläche ſei.

Aus §. 270 folgt, daß die geſuchte Berührungsebene beſtimmt iſt, wenn man irgend zwei durch den gegebenen Berührungspunct gehende Tangenten der krummen Fläche kennt. Man wird ſich daher immer zuerſt zwei Curven zu verſchaffen ſuchen, welche auf der krummen Fläche durch den gegebenen Punct gehen, an dieſe Curven Tangenten ziehen und dann durch beide Tangenten eine Ebene legen. Zwei ſolche Curven kann man erhalten, wenn man die krumme Fläche von Ebenen, welche durch den Berührungspunct gehen, ſchneiden läßt, wozu ſpäter (Kap. IV) Anleitung gegeben werden wird. Bei vielen Flächen aber hat man einfachere Mittel, zu den erforderlichen Linien zu gelangen, wie die Beiſpiele der folgenden §§ zeigen werden.

†) Kann man durch den gegebenen Berührungspunct eine gerade Linie ziehen, ſo iſt dieſe als ihre eigene Tangente zu betrachten und muß jedenfalls in der geſuchten Berührungsebene liegen, ſo daß man dann nur noch eine Curve auf der Fläche nöthig hat. Sind durch den gegebenen Punct zwei Gerade auf der Fläche möglich, ſo beſtimmen dieſe unmittelbar die Berührungsebene.

Berührungsebenen an Drehungsflächen.

§. 273.

Durch jeden Punct A einer Drehungsfläche geht ein Parallelkreis und ein Meridian, und dieſe beiden Curven

Digitized by Google

bieten ſich am natürlichſten als Hülfscurven für die Conſtruction der Berührungsebene in A dar.

α) Die Berührungsebene einer Drehungsfläche ſteht ſenkrecht auf der durch den Berührungspunct gehenden Meridianebene. Denn wenn man durch den Berührungspunct A den Parallelkreis zieht und an dieſen durch A eine Tangente T legt, ſo ſteht T ſenkrecht auf der durch A gehenden Meridianebene M *); und da die Berührungsebene durch T gehen muß, ſo ſteht auch dieſe ſenkrecht auf M (§. 2, XI).

β.) Alle Berührungsebenen einer Drehungsfläche für die Puncte eines und desſelben Parallelkreiſes ſchneiden die Drehungsaxe in demſelben Puncte. Denn denkt man ſich an einen Meridian eine Tangente gezogen, welche die Drehungsaxe im Puncte X ſchneidet, ſo wird bei der Drehung des Meridians der Berührungspunct einen Parallelkreis beſchreiben, aber die verſchiedenen Lagen, in welche die Tangente nach und nach kommt, müſſen alle durch den unbeweglichen Punct X gehen; werden nun durch verſchiedene Puncte jenes Parallelkreiſes Berührungsebenen an die Drehungsfläche gelegt, ſo gehen dieſe durch die verſchiedenen Lagen der Meridiantangente, alſo immer durch den Punct X.

γ) Jede Normale einer Drehungsfläche ſchneidet die Drehungsaxe. Denn da die Berührungsebene ſenkrecht auf der Meridianebene des Berührungspunctes iſt, ſo muß die Normale ganz in dieſe Meridianebene fallen, folglich der Drehungsaxe begegnen. (Doch kann in gewiſſen Fällen dieſer Begegnungspunct unendlich entfernt oder die Normale der Drehungsaxe parallel ſein.)

---

*) Um dieß zu beweiſen, denke man ſich einen Durchmeſſer des Parallelkreiſes parallel mit T gezogen; dieſer ſteht ſenkrecht auf der Drehungsaxe und zugleich ſenkrecht auf dem Durchmeſſer, nach welchem die Ebene des Parallelkreiſes von der Meridianebene M geſchnitten wird, alſo ſenkrecht auf M ſelbſt (§. 2, VII); mithin iſt auch T $\perp$ M (§. 2, XV).

Digitized by Google

Zugleich ſieht man hieraus, daß jede (Haupt-) Normale irgend eines Meridians zugleich eine Normale der Drehungsfläche iſt.

h) Alle Normalen einer Drehungsfläche, welche ihre Fußpuncte in dem nämlichen Parallelkreiſe haben, ſchneiden die Drehungsaxe in dem nämlichen Puncte. Trifft nämlich irgend eine Normale die Drehungsaxe im Puncte Y, ſo wird dieſelbe bei Drehung der Meridianebene, in welcher ſie liegt, in immer andere Lagen kommen, jedoch ſtets Normale des Meridians, und mithin auch der Fläche ſelbſt, bleiben; ihr Fußpunct wird dabei einen Parallelkreis durchlaufen, aber der Punct Y kann ſeine Stelle nicht ändern.

§. 274.

Aufg. Die Berührungsebene einer durch die (verticalſtehende) Drehungsaxe (o, o′o″) und den Hauptmeridian (vw, v′u′w′) gegebenen Drehungsfläche zu finden, wenn man die H-Projection a des Berührungspunctes kennt.

Aufl. I. Die H-Projection des durch A gehenden Meridians iſt oa. Dreht man dieſen Meridian bis er auf den Hauptmeridian fällt, ſo kommt a in die Lage b (ſo daß ob = oa) und die zugehörige V-Projection iſt b′. Durch b′ ziehe man eine Tangente b′o″ an die Curve v′u′w′; dann iſt (ob, o″b′) die durch (b, b′) gehende Tangente des Hauptmeridians und S ihre H-Spur. Bei der Zurückbewegung des Meridians in ſeine urſprüngliche Lage beſchreibt dieſe Tangente eine Kegelfläche, deren Spitze (o, o″) in der Drehungsaxe liegt; die H-Spur S kommt nach P zu liegen (oP = oS) und die H-Spur der geſuchten Berührungsebene muß durch P gehen. Die Projectionen der Geraden, welche in A den betreffenden Parallelkreis berührt, ſind offenbar ar (⊥ oa) und a′b′R′ (|| GS), und durch die V-Spur R′ dieſer Berührungslinie geht die V-Spur der geſuchten Berührungsebene. Die H-Spur der Ebene iſt aber parallel mit ar (§. 34, Zuſ. II); zieht man daher PQ || ar und verbindet Q mit R′, ſo iſt PQR′ die Berührungsebene im Puncte A. Fig. 95.

Digitized by Google

Aufl. II. Man beſtimme die Linien o''b', b'R', ar wie vorhin. Sucht man die zu a gehörige V-Projection a' (§. 227) und zieht o''a', ſo berührt (oa, o''a') den durch A gehenden Meridian in A (vgl. Bem. zu §. 273, β). Eine Ebene, durch (oa, o''a') und (ar, a'R') gelegt (§. 47), iſt die geſuchte Berührungsebene.

Aufl. III. Iſt b'o'', wie in Aufl. I gefunden, ſo kann man auch die V-Projection b'c' (⊥ b'o'') für die durch (b, b') gehende Normale der Drehungsfläche zeichnen. Verbindet man (nachdem a' beſtimmt iſt) c' mit a', ſo iſt (oa, c'a') die Normale des Punctes A (§. 273, δ). Nun beſtimme man den Punct R' wie in Aufl. I, ziehe R'Q ⊥ c'a' und dann QP ⊥ oa, ſo iſt PQR' die verlangte Berührungsebene (§. 24).

Die Vergleichung dieſer drei Auflöſungen leitet für jede einzelne auf verſchiedene Genauigkeitsproben.

§. 275.

Iſt von einer Drehungsfläche (mit verticaler Axe) nicht der Hauptmeridian gegeben, ſondern irgend ein anderer Meridian oder auch irgend eine vom Meridian verſchiedene Erzeugende, ſo wird man, um die Berührungsebene zu finden, entweder den Hauptmeridian ſuchen (§. 230) und dann die Aufl. I des §. 274 anwenden; oder man zeichnet ſtatt des Hauptmeridians den durch den Berührungspunct gehenden Meridian (§. 229), zieht an ihn die Tangente und verfährt übrigens wie in §. 274, Aufl. II; oder endlich man projicirt (nach §. 228) die durch den Berührungspunct gehende Lage der Erzeugenden (wenn dieſe nämlich nicht zugleich ein Meridian iſt) und beſtimmt die Berührungsebene mittels der Tangente dieſer Lage und der Tangente des entſprechenden Parallelkreiſes. Der letztere Weg würde z. B. der ſicherſte ſein, wenn durch den Punct (b, b') der in Fig. 96 dargeſtellten Fläche eine Berührungsebene geführt werden ſollte; denn die Tangente der durch (b, b') gehenden Erzeugenden läßt ſich nach §. 210 genau conſtruiren. Noch natürlicher iſt dieſer Weg beim Drehungs-Hyperboloid, weil hier die Erzeugende zugleich für ihre eigene Tangente gilt.

Digitized by Google

Berührungsebenen an entwickelbaren Flächen.

§. 276.

Bei jeder entwickelbaren Fläche findet ſich die Eigenthümlichkeit, daß die durch einen ihrer Puncte gelegte Berührungsebene ſie zugleich noch in unendlich vielen andern Puncten berührt, welche alle auf einer Geraden liegen. Es wurde nämlich früher (§. 246) gezeigt, daß jede entwickelbare Fläche als Umhüllungsfläche einer beweglichen Ebene betrachtet werden kann, welche entweder ſtets eine gewundene Curve berührt, oder durch einen feſten Punct geht, oder mit einer feſten Geraden parallel bleibt; jede Lage der umhüllten Ebene berührt (§. 240) die Umhüllungsfläche nach der Characteriſtik und dieſe iſt eine Gerade (§. 241); für alle möglichen Puncte einer ſolchen Geraden iſt alſo nur eine einzige Berührungsebene der Fläche möglich.

Hat die entwickelbare Fläche eine Rückkehrcurve, ſo giebt es für jeden Punct dieſer Curve nur eine Berührungsebene, obgleich dort zwei Flächenmäntel zuſammenſtoßen; denn die Berührungsebene der Fläche iſt eine Berührungsebene der Rückkehrcurve, und einer Curve kommt für einen gewöhnlichen Punct nur eine Berührungsebene zu. Jene beiden Flächenmäntel haben alſo für jeden gemeinſchaftlichen Punct eine gemeinſchaftliche Berührungsebene oder ſie berühren ſich ſelbſt.

Da die Berührungsebene einer entwickelbaren Fläche durch die gerade Mantellinie geht, auf welcher der Berührungspunct liegt, ſo hat man zu ihrer Beſtimmung nur noch eine Curve auf der Fläche zu zeichnen. Dieſe Curve braucht nicht einmal durch den Berührungspunct ſelbſt zu gehen, wenn ſie nur jene Mantellinie ſchneidet; denn eine Tangente derſelben, durch ihren Schnitt mit der Mantellinie gezogen, muß jedenfalls in die fragliche Berührungsebene fallen.

†) Man ſieht hieraus, daß man den Satz in §. 270, † bezüglich der entwickelbaren Flächen in nachfolgender allgemeinerer Form ausſprechen kann: Wird eine entwickelbare Fläche F von einer Ebene E nach der Man-

Digitized by Google

tellinie M berührt, und es ſchneidet irgend eine andere Ebene die F in der Curve f, die E in der Geraden e, die M im Puncte m, ſo berührt e die Curve f in m.

§. 277.

Fig. 93. Aufg. An eine Cylinderfläche, welche (vw, v'w') als Leitende und eine zu (mn, m'n') parallele Erzeugende hat, ſoll eine Berührungsebene durch den in a h-projicirten Flächenpunct gelegt werden.

Aufl. Da die H-Projection a mehrern Flächenpuncten entſprechen kann (§. 217, Zuſ.), ſo würde man mehrere Auflöſungen erhalten. Es ſoll aber von dieſen Puncten hier nur derjenige berückſichtigt werden, welcher die kleinſte H-Diſtanz hat.

Man projicire (nach §. 216) die durch A gehende Mantellinie (ab, a'b') und ziehe durch den Punct (b, b'), wo ſie die Leitende ſchneidet, eine Tangente (bP, b'p') an letztere. Die durch (ab, a'b') und (bP, b'p') gelegte Ebene PQR' iſt die geſuchte Berührungsebene.

§. 278.

Aufg. Durch einen auf einer Kegelfläche gegebenen Punct (a, a'') eine Berührungsebene an dieſe zu legen.

Aufl. ganz ähnlich wie in §. 277. (S. Fig. 94).

§. 279.

Aufg. Eine entwickelbare Schraubenfläche Fig. 102. iſt durch ihre Rückkehrcurve (Abcd.., a'b'c'd'..), deren Axe ſenkrecht auf der HE ſteht, gegeben. *) Man ſoll durch den in δ h-projicirten Punct Δ der Fläche eine Berührungsebene an ſie legen.

*) So wie durch jene Schraubenlinie (Abc.., a'b'c'..) die Schraubenfläche ſelbſt als gegeben erſcheint, ſo iſt überhaupt

Digitized by Google

Aufl. I. Eine aus δ an den Kreis Abc.. gezogene Tangente δd iſt die H-Projection der durch ⊿ gehenden (mithin ganz in die Berührungsebene fallenden) Mantellinie und ihr Berührungspunct d die H-Projection desjenigen Punctes, in welchem dieſe Mantellinie die Schraubenlinie (Abc.., a′b′c′..) berührt. Man beſtimme die zugehörige V-Projection d′ (mittels dd′ ⊥ GS) und dann (nach §. 210) die V-Projection d′p′ der erwähnten Mantellinie.*) Die H-Spur der geſuchten Berührungsebene muß durch die H-Spur P der Mantellinie D⊿ gehen (§. 20) und die H-Spur der Schraubenfläche berühren (§. 276, †). Da aber die Flächenſpur eine Evolvente des Kreiſes Abc.. iſt (§. 247), ſo iſt dδP eine *Normale* derſelben (§. 186) und alſo ſenkrecht auf der H-Spur der Berührungsebene. Demnach kann man dieſe Spur PR der Berührungsebene zeichnen, ohne daß man die Spur der Fläche braucht, und die V-Spur der Berührungsebene iſt dann leicht hinzuzufügen, da ſie durch die V-Spur der Mantellinie PD gehen muß.

Aufl. II. Man projicire die Mantellinie D⊿ wie oben. — Aus dem Vorigen weiß man, daß die H-Spur

---

jede entwickelbare Fläche durch ihre Rückkehrcurve völlig beſtimmt; denn um alle ihre Mantellinien zu erhalten, darf man nur alle Elemente der Rückkehrcurve verlängern, d. h. durch alle Puncte der Curve Tangenten an ſie ziehen. (Vgl. §. 246).

*) Die auf dem Grundſchnitt ſenkrechte dd′ trifft die V-Projection der Schraubenlinie noch in unendlich vielen andern Puncten; daher können in δd unendlich viele Mantellinien projicirt ſein. Ferner kann man aus δ an den Kreis Abc.. noch eine zweite Tangente ziehen, welche ebenfalls die gemeinſchaftliche H-Projection von unendlich vielen Mantellinien der Fläche vorſtellt. Auf allen dieſen Mantellinien kann der Punct ⊿ liegen (und die verſchiedenen Lagen der V-Projection würde man leicht nach §. 41 erhalten). Damit man nun einen beſtimmten Fall vor Augen habe, iſt oben unter den möglichen Lagen des Punctes ⊿ diejenige gewählt, welchem *oberhalb* der HE die kürzeſte H-Diſtanz zukommt.

PR der Berührungsebene ſenkrecht auf dP iſt. Denkt man ſich nun von dem Puncte D der Schraubenlinie auf die Are derſelben eine Senkrechte (do, d′o′) gefällt, ſo iſt dieſe (da od || PR, o′d′ || GS) parallel mit PR (§. 22) und liegt mithin in der Berührungsebene. Letztere iſt daher durch die beiden Geraden DΔ und DO völlig beſtimmt. Man findet ihre Spuren, wenn man die V-Spuren dieſer Geraden verbindet und aus dem Puncte, wo die Verbindungslinie den Grundſchnitt trifft, eine Senkrechte auf dδ fällt.

Dieſe Auflöſung iſt noch einfacher als die erſte, weil man der Rectification des Kreisbogens dcA überhoben iſt, welche man vorhin zur Beſtimmung des Punctes P nöthig hatte.

Zuſatz. Die Mantellinie DP ſteht ſenkrecht auf PR und ihre H-Neigung iſt alſo zugleich die H-Neigung der Berührungsebene (§. 73, Zuſ.). Da aber alle möglichen Mantellinien der Schraubenfläche immer dieſelbe H-Neigung haben, ſo ſchneiden auch alle möglichen Berührungsebenen der Schraubenfläche die HE unter dem nämlichen Winkel.

Hieraus läßt ſich eine neue Erzeugungsart der entwickelbaren Schraubenfläche folgern. Dieſe Fläche wird nämlich als Umhüllungsfläche einer beweglichen Ebene entſtehen, welche gegen die Grundebene eine conſtante Neigung behält, während ihre Spur ſtets Tangente an einer in der Grundebene gezeichneten Kreisevolvente bleibt.

Berührungsebenen an windſchiefen Flächen.

§. 280.

Die Berührungsebene einer windſchiefen Fläche enthält die durch den Berührungspunct A gehende Mantellinie M (§. 272, †); aber ſie berührt nicht die Fläche nach der ganzen Länge dieſer Geraden, ſondern nur in dem einzigen Puncte A. Legt man nämlich an die Fläche durch A eine beliebige Berührungslinie und durch irgend einen andern Punct B der Mantellinie M eine zweite, ſo beſtimmt die erſte Tangente mit M die

Berührungsebene für A; in dieſe Ebene kann unmöglich die zweite Tangente fallen, denn würden beide Tangenten in einerlei Ebene liegen, ſo müßte auch eine unendlich nah an M genommene Mantellinie M′ mit M in einerlei Ebene liegen, weil M, um in M′ überzugehen, auf jenen Tangenten (oder eigentlich auf den Elementen, welche ſie mit zwei in der Fläche liegenden Curven gemein haben) fortgleitet, und dieſe Annahme iſt mit dem Begriffe einer windſchiefen Fläche unvereinbar. Demnach entſpricht dem Puncte B eine Berührungsebene, welche von der Berührungsebene des Punctes A verſchieden iſt und mit letzterer nur die Gerade M gemein hat.

Man ſieht aus dem Vorigen, daß eine Berührungsebene die windſchiefe Fläche zugleich nach derjenigen Mantellinie (M) ſchneidet, auf welcher der Berührungspunct liegt. Aber außerdem ſchneidet die nämliche Berührungsebene die Fläche noch nach einer zweiten (gewöhnlich krummen) Linie; denn im Allgemeinen werden die Mantellinien der Fläche mit der Berührungsebene nicht parallel laufen, ſondern dieſe in verſchiedenen Puncten ſchneiden, deren Geſammtheit dann jene zweite Schnittlinie darſtellt. Der Berührungspunct muß jedenfalls auf derſelben liegen. — Für das einmantelige Hyperboloid und das hyperboliſche Paraboloid wird die eben erwähnte Schnittlinie gerade. Es wurde nämlich in §. 252 und §. 256 gezeigt, daß auf dieſen Flächen durch den Berührungspunct A außer der Mantellinie M noch eine zweite Mantellinie N gezogen werden kann, und durch dieſe muß die Berührungsebene gehen (§. 272, †). Da aber die N von allen denjenigen Mantellinien, welche mit M zu einerlei Syſtem gehören, geſchnitten wird, und eben ſo die M von allen Mantellinien des andern Syſtems, ſo ſieht man, daß die Berührungsebene mit der krummen Fläche keine andern Puncte gemein haben kann als die Puncte der Geraden M und N.

§. 281.

Dreht man eine Ebene, welche irgend eine windſchiefe Fläche in dem Puncte A berührt, um die durch A gehende Mantellinie M, ſo bleibt ſie fortwährend eine Berührungs-

Digitized by Google

ebene, aber der Berührungspunct wird in jedem Augenblicke ein anderer, indem er auf M fortrückt. Um dieß ſich deutlich zu machen, ſchneide man die windſchiefe Fläche durch unendlich viele Ebenen, welche zur Vereinfachung der Vorſtellung alle unter ſich parallel ſein mögen, und lege dann durch die Puncte $A_1, A_2, A_3, \ldots$, in denen ſie die Mantellinie M treffen, die Tangenten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ an die Schnittcurven. Bei Drehung jener erſten Ebene um M werden der Reihe nach die Tangenten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ in ſie fallen, ſo daß ſie nach und nach für die Puncte $A_1, A_2, A_3, \ldots$ als Berührungsebene erſcheint.

Es wird hieraus klar, daß überhaupt jede Ebene, welche eine windſchiefe Fläche nach einer Mantellinie ſchneidet, zugleich die Fläche in irgend einem Puncte dieſer Mantellinie berührt. Iſt eine ſolche Ebene E beliebig durch die Mantellinie M gelegt, ſo findet man den Berührungspunct auf folgende Weiſe. Man projicire die erzeugende Gerade in mehrern der M vorausgehenden Lagen $'M, ''M, '''M, \ldots$ und auch in mehreren auf M folgenden Lagen $M', M'', M''', \ldots$; hierauf ſuche man die Schnittpuncte $'P, ''P, '''P, \ldots, P', P'', P''', \ldots$ dieſer Lagen und der Ebene E (§. 45). Legt man durch die erhaltenen Puncte (P) eine ſtetige Curve, ſo ſchneidet dieſe die M in dem geſuchten Berührungspuncte. — Iſt die gegebene windſchiefe Fläche ein Hyperboloid oder Paraboloid, ſo liegen die Puncte P auf einer geraden Linie (§. 280) und man hat daher deren nur zwei zu beſtimmen (alſo auch außer M nur noch zwei Mantellinien zu projiciren, welche aber mit M zu einerlei Syſtem gehören müſſen).

§. 282.

Unter beſondern Umſtänden kann es geſchehen, daß die Curve, welche im Allgemeinen durch die Puncte P beſtimmt wird, die M nicht ſchneidet, ſondern ſich ihr als einer Aſymptote ohne Aufhören nähert. Dann liegt der Berührungspunct auf der M in unendlicher Entfernung und die Berührungsebene wird zu einer aſymptotiſchen Ebene. —

Digitized by Google

Beim einmanteligen Hyperboloide, wo die Puncte P in einer Geraden liegen, geht die berührende Ebene in eine aſymptotiſche über, ſobald jene Gerade parallel mit M läuft (was ſehr wohl möglich ſein kann, da jede Mantellinie eine parallele des nämlichen Syſtems hat). Jede aſymptotiſche Ebene des Hyperboloids iſt eine Berührungsebene des aſymptotiſchen Kegels, denn die Ebene irgend zweier parallelen Mantellinien des Hyperboloids enthält zugleich eine Mantellinie des Kegels. Denkt man ſich z. B. auf dem in Fig. 103 dargeſtellten Hyperboloide zwei parallele Mantellinien gezogen (deren eine etwa die [Uv, u′v″] ſein mag), ſo ſind die H-Projectionen derſelben zwei parallele Tangenten der Ellipſe kil und ihre Berührungspuncte y, z liegen auf einem Durchmeſſer dieſer Ellipſe *); da aber dieſe Berührungspuncte die H-Projectionen der Puncte Y, Z ſind, in denen die beiden Mantellinien die Äquatorialellipſe KIL ſchneiden, ſo liegen auch Y und Z mit dem Mittelpuncte O des Hyperboloids in gerader Linie; nun geht diejenige Mantellinie des aſymptotiſchen Kegels, welche mit jenen Mantellinien des Hyperboloids parallel iſt, durch O, und mithin liegt ſie mit letzteren in einerlei Ebene. —

Hiernach erſcheint der aſymptotiſche Kegel als die Umhüllungsfläche aller aſymptotiſchen Ebenen des Hyperboloids.

Beim hyperboliſchen Paraboloid, wo die Puncte P ebenfalls in eine Gerade fallen, kann dieſe Gerade zwar nicht mit M parallel werden, aber ſie kann in unendliche Entfernung fallen, mithin ganz verſchwinden. Dieß iſt in der That der Fall, wenn die durch M gelegte Ebene E parallel mit der Richtebene iſt; denn dann ſind alle Mantellinien, welche mit M zu einerlei Syſtem gehören, parallel mit E (oder ihre Schnitte P mit E liegen unendlich fern). Man betrachtet aber auch jetzt noch die Ebene E als Berührungsebene für einen unendlich entfernten Punct auf M, oder als eine aſymptotiſche Ebene.

*) was ſogleich in die Augen fällt, wenn man die Ellipſe als Kreisprojection anſieht.

§. 283.

Eine mit Hülfe einer Leitfläche erzeugte windſchiefe Fläche berührt dieſe Leitfläche in einer Curve C, welche durch die Folge derjenigen Puncte beſtimmt wird, in denen die einzelnen Lagen der Erzeugenden die Leitfläche berühren. Iſt nämlich M irgend eine Lage der Erzeugenden, T der Punct, wo ſie die Leitfläche berührt (alſo ein Punct der Curve C), X die durch T an C gezogene Tangente (wobei wohl zu beachten, daß C ſowohl auf der leitenden als auf der erzeugten Fläche liegt), ſo berührt die durch M und X gelegte Ebene die windſchiefe Fläche, inſofern M eine Mantellinie und X eine Tangente derſelben iſt; die nämliche Ebene berührt aber auch die Leitfläche, inſofern M und X zwei Tangenten derſelben ſind. Beide Flächen haben daher im Puncte T eine gemeinſchaftliche Berührungsebene, und das nämliche gilt für jeden andern Punct der Curve C.

Es iſt klar, daß auch jede Berührungslinie der Leitfläche für einen auf C willkührlich genommenen Punct zugleich eine Berührungslinie der erzeugten Fläche iſt, weil ſie in die dieſem Puncte entſprechende gemeinſchaftliche Berührungsebene fällt.

§. 284.

Fig. 110. Aufg. Eine Schraubenfläche mit verticaler Axe iſt durch die leitende Schraubenlinie (Ab..., a′b′...) und eine zur VE parallele Lage (AO, a′z′) der Erzeugenden gegeben. Man ſoll die Berührungsebene derſelben finden, wenn q die H-Projection des Berührungspunctes iſt.

Aufl. Von den unendlich vielen Puncten der Fläche, welche gemeinſchaftlich in q projicirt ſind, ſoll derjenige gewählt werden, welcher in kürzeſter Diſtanz über der HE liegt.

Man projicire die durch Q gehende Lage (Ob, n′b′) der Erzeugenden (§. 264) und ſuche auf n′b′ die V-Projection q′ von Q. Ein mit Oq um O beſchriebener Kreis iſt die H-Projection einer Schraubenlinie, welche auf der Schrau-

benfläche liegt und durch Q geht (vgl. §. 265). Eine durch Q gelegte Tangente dieſer neuen Schraubenlinie beſtimmt mit (Ob, n'b') die Berührungsebene, und dieſe Tangente ſelbſt findet man nach §. 210, wobei man (wie eine nähere Betrachtung des dort angegebenen Verfahrens zeigt) die V-Projection der neuen Schraubenlinie gar nicht nöthig hat.

Zuſ. Legt man auch durch die übrigen in q projicirten Flächenpuncte Berührungsebenen, ſo ſind alle dieſe Ebenen einander parallel. Denn es ſind die durch dieſe Puncte gehenden Mantellinien unter ſich parallel (§. 264) und ebenſo die entſprechenden Tangenten der neuen Schraubenlinie (§. 210, Zuſ. IV), mithin auch die Ebenen der verſchiedenen Paare zuſammengehöriger Linien (§. 2, XX).

§. 285.

Aufg. An ein gegebenes einmanteliges Hyperboloid eine Berührungsebene zu legen, wenn die H-Projection q des Berührungspunctes gegeben iſt.

Auflöſung.

A.) Die Fläche ſei auf die in §. 253 angenommene Art gegeben.

Man projicire die beiden durch Q gehenden Mantellinien (§. 253, I) und lege durch ſie eine Ebene (§. 47). *)

B.) Es ſeien irgend drei Mantellinien von einerlei Syſtem gegeben.

Man nehme die HE ſenkrecht zu der einen Mantellinie an und lege zugleich die VE durch dieſe Mantellinie. Unter dieſen Vorausſetzungen ſeien A'B', (cd, c'D'), (ef, e'F') die drei gegebenen Mantellinien. Das Syſtem, welchem ſie angehören, heiße das erſte. Fig. 113.

*) Auf ganz ähnliche Art geſtaltet ſich die Auflöſung für ein Drehungs-Hyperboloid, welches durch die verticale Drehungsaxe und irgend eine Lage der erzeugenden Geraden gegeben iſt (vgl. §. 233).

Digitized by Google

Da alle Mantellinien des zweiten Syſtems die A′B′ ſchneiden müſſen, ſo gehen die H=Projectionen derſelben ſämmtlich durch A′; zieht man daher A′q, ſucht die zu c und e gehörigen V=Projectionen c′, e′ (§. 41) und verbindet ſie, ſo iſt (ce, c′e′) die durch den Berührungspunct Q gehende Mantellinie des zweiten Syſtems, und es läßt ſich nun auch die V=Projection q′ dieſes Punctes angeben. Die Spuren S, S′ der Mantellinie (ce, c′e′) liegen in den Spuren der geſuchten Berührungsebene. Zur wirklichen Beſtimmung dieſer Ebene muß aber auch diejenige Mantellinie des **erſten** Syſtems projicirt werden, welche durch Q geht. In dieſer Abſicht ſucht man zuerſt noch zwei Mantellinien (gh, g′h′), (df, D′F′) des zweiten Syſtems, indem man ihre H=Projectionen durch A′ beliebig zieht und ihre V=Projectionen wie vorhin beſtimmt. Auf dieſen Linien muß die gewünſchte Mantellinie des erſten Syſtems aufliegen; daher erhält man letztere, wenn man durch (q, q′) und (df, D′F′) eine Ebene führt, den Schnittpunct dieſer Ebene mit (gh, g′h′) ſucht und ihn mit (q, q′) verbindet. Um die erwähnte Ebene durch möglichſt einfache Conſtruction zu finden, wurde die Mantellinie (df, D′F′) in die VE verlegt, ſo daß ihre V=Projection D′F′ ſogleich die V=Spur der Ebene iſt. Nachdem nun (mittels QR || D′F′) auch ihre H=Spur OR gezogen und ihr Schnitt (m, m′) mit (gh, g′h′) gefunden iſt (§. 45), beſtimmt man die Spuren T, T′ der Verbindungslinie (mq, m′q′) und hat dann in ST, S′T′ die Spuren der geſuchten Berührungsebene. *)

Wenn die drei gegebenen Mantellinien der Fläche urſprünglich in ſolchen Stellungen projicirt ſind, daß keine derſelben die für A′B′ angenommene günſtige Lage hat, ſo ändert man das Grundſyſtem, indem man erſtlich die VE gegen die h=projicirende Ebene einer Mantellinie umtauſcht (§. 108) und hierauf auch die HE ſo dreht, daß ſie ſenkrecht zu dieſer Mantellinie ſteht (§. 108).

Eine ſolche Änderung wird jedoch unnöthig, wenn der Berührungspunct auf einer der gegebenen Mantellinien (M) liegt;

---

*) Die Puncte T, T′ müſſen in die Spuren der Ebene ROF′ fallen.

denn man kann dann leicht ſeine zweite Projection beſtimmen und durch ihn (mittels §. 47 und §. 45) eine Gerade N ziehen, welche auf den drei Mantellinien aufliegt; durch M und N geht die Berührungsebene.

§. 286.

Aufg. An ein gegebenes hyperboliſches Paraboloid eine Berührungsebene zu legen, wenn die V-Projection q′ des Berührungspunctes bekannt iſt.

Auflöſung.

A.) Das Paraboloid ſei durch die beiden Parabeln (wv, w′v′w″), ($t_0 vt$, t′v′) gegeben, welche in ſeine (mit den Grundebenen parallelen) Hauptebenen fallen.*) Fig. 114.

Aus §. 260, a und §. 258 weiß man, daß die Parabel $t_0 vt$ von den H-Projectionen und die Parabel w′v′w″ von den V-Projectionen aller Mantellinien berührt wird. Zwei aus q′ an w′v′w″ gezogene Tangenten q′p′, q′w′ ſind daher die V-Projectionen der durch Q gehenden Mantellinien und die Berührungspuncte p′, w′ die V-Projectionen der Puncte P, W, in denen dieſe Mantellinien die verticale Hauptebene ſchneiden. Als zugehörige H-Projectionen erhält man auf vw die Puncte p und w; von den aus w an $t_0 vt$ gelegten Tangenten wt, wt_0 kann jede als H-Projection zu q′w′ gehören, und eben ſo ſind die von p ausgehenden Tangenten pr, pr_0 die H-Projectionen zweier Mantellinien, denen die gemeinſame V-Projection q′p′ zukommt. Die Schnittpuncte q, q_0 ſind die H-Projectionen der beiden in q′ v-projicirten Flächenpuncte.**) Betrachtet man nun (q, q′) als den Berührungspunct, ſo erhält man die Berührungsebene,

*) alſo auf dieſelbe Art wie in Fig. 100 (§. 239).

**) Man hat alſo hierin zugleich eine neue Auflöſung für die Aufgabe des §. 239; denn daß dort die H-Projection und hier die V-Projection eines Flächenpunctes gegeben iſt, macht keinen weſentlichen Unterſchied.

Digitized by Google

wenn man durch ($qp, q'p'$) und ($qw, q'w'$) eine Ebene legt; läßt man aber (q_o, q') als Berührungspunct gelten, ſo geht die Berührungsebene durch ($q_o p, q'p'$) und ($q_o w, q'w'$).

B.) Das Paraboloid ſei durch zwei Leitende und eine Richtebene gegeben.

Fig. 109. Die Richtebene ſei die HE; die Leitenden ſeien ($Ah, a'b'$), ($ot_1, o''t'$). Die mit dem Grundſchnitt parallele $c'q't'$ iſt die V-Projection einer durch Q gehenden Mantellinie des Paraboloids, für welche man die H-Projection ct_1 nach Beſtimmung der Puncte c und t_1 (§. 41) findet. Auf ct_1 ergiebt ſich die H-Projection q des Berührungspunctes Q. Da (wie in §. 256 bewieſen wurde) bei horizontaler Lage der Richtebene die V-Projectionen aller derjenigen Mantellinien, zu deren Syſtem die Leitenden gehören, ſich in einem Puncte ſchneiden, ſo erhält man die V-Projection für die zweite durch Q gehende Mantellinie, wenn man q' mit dem Schnitte b' der $a'b'$ und $t'o''$ verbindet. Die H-Spur S dieſer Mantellinie muß in der Linie AF liegen, welche die H-Spuren der gegebenen Leitenden verbindet (denn AF iſt eine Lage der urſprünglichen Erzeugenden und muß alſo von der Mantellinie QS geſchnitten werden). Durch die beiden Linien QS und QC iſt die geſuchte Berührungsebene beſtimmt, und man erhält demnach ihre Spuren, wenn man SX || cqt_1 zieht und X mit der V-Spur R' der QC verbindet.

Iſt die gegebene Richtebene nicht horizontal, ſo kann man das Grundſyſtem ändern, indem man die VE ſenkrecht zur H-Spur der Richtebene legt und dann dieſe letztere Ebene ſelbſt für die HE nimmt (§. 108).

§. 287.

Die Auflöſung der beiden letzten Aufgaben (§. 285 und §. 286) iſt deswegen beſonders einfach, weil ſich die Berührungsebene immer durch Hülfe gerader Linien beſtimmen läßt. Auf dieſe einfachen Aufgaben können aber auch alle jene Aufgaben zurückgeführt werden, welche die Berührungsebene für eine beliebige windſchiefe Fläche verlangen. Dieß wird aus folgender Betrachtung erhellen.

Digitized by Google

Man ſchneide irgend eine windſchiefe Fläche F durch drei beliebige Ebenen und ziehe durch die drei Schnittcurven Tangenten durch ſolche Puncte, welche auf einerlei Mantellinie M der Fläche liegen. Jene drei Curven kann man als die Leitenden der Fläche gelten laſſen und ihre Tangenten als die Leitenden eines einmanteligen Hyperboloids H. Die drei Ebenen, welche durch M und je eine der erwähnten Tangenten beſtimmt werden, ſind offenbar drei gemeinſchaftliche Berührungsebenen der Flächen F und H. Aber auch für jeden andern Punct auf M iſt die Berührungsebene beiden Flächen gemeinſchaftlich, was ſich in folgender Art beweiſen läßt. Die M erzeugt die Fläche F, wenn ſie auf den drei Schnittcurven fortgleitet; die Fläche H dagegen, wenn ſie ſich auf den drei Tangenten fortbewegt; beim Übergange in die unendlich nahe Nachbarlage bleibt ſie aber auf den Elementen, welche jene drei Curven mit ihren Tangenten gemein haben, folglich auf beiden Flächen, oder F und H haben den unendlich ſchmalen windſchiefen Flächenſtreifen, welcher zwiſchen den beiden Nachbarlagen der M enthalten iſt (und ein Flächen-Element genannt werden kann), gemeinſchaftlich; denkt man ſich nun eine neue (vierte) Ebene hinzu, welche die Fläche F in der Curve f und die Fläche H in der Curve h ſchneidet, ſo müſſen beide Curven dasjenige Element gemeinſchaftlich haben, welches in das vorhinerwähnte Flächenelement fällt, oder ſie haben in dem Puncte P, wo ſie von der urſprünglichen Lage der M geſchnitten werden, einerlei Tangente, und daher haben auch die Flächen F und H im Puncte P einerlei Berührungsebene, wobei nicht vergeſſen werden darf, daß P jeden beliebigen Punct der M bedeuten kann. Demnach berühren ſich die Flächen F und H ſelbſt nach der gemeinſchaftlichen Mantellinie M. — Das Hyperboloid H kann aber für dieſelbe Fläche F und dieſelbe Mantellinie M unendlich viele verſchiedene Formen annehmen; denn ſeine Leitenden ſind drei Tangenten, welche man durch drei beliebig auf M genommene Puncte beliebig zieht. Sind dieſe drei Tangenten mit einer Ebene parallel (was immer möglich iſt), ſo geht das Hyperbo-

Digitized by Google

loid in ein hyperboliſches **Paraboloid** über (§. 256, gegen Ende).

Das Ergebniß obiger Unterſuchung iſt der Lehrſatz: **Jede windſchiefe Fläche kann in irgend einer willkührlich beſtimmten Mantellinie von unendlich vielen einmanteligen Hyperboloiden und unendlich vielen hyperboliſchen Paraboloiden berührt werden.** *)

Iſt nun eine windſchiefe Fläche F z. B. durch drei Leitcurven gegeben und auf einer Mantellinie M derſelben ein Punct A, durch welchen eine Berührungsebene geführt werden ſoll; ſo ziehe man an die Leitcurven durch die Puncte, wo ſie von der M geſchnitten werden, Tangenten, betrachte dieſe als die Leitenden eines Hyperboloids und ſuche für daſſelbe die dem Puncte A entſprechende Berührungsebene (§. 235, B); dieſe berührt dann zugleich die Fläche F in A.

Iſt eine windſchiefe Fläche F durch zwei Leitende und eine Richtebene gegeben, ſo findet man ein berührendes Paraboloid, wenn man an die Leitenden Tangenten durch die Puncte zieht, wo ſie von einer Mantellinie M getroffen werden, und dann dieſe Tangenten als Leitende eines Paraboloids P nimmt, welches mit der gegebenen Fläche F die Richtebene gemein hat. Denn beim Übergange in die unendlich nahe folgende Lage bleibt die M ſowohl auf den Leitenden als auf ihren Tangenten, daher ſowohl auf F als auf P, oder beide Flächen haben ein **Element** gemeinſchaftlich.

Iſt die windſchiefe Fläche F durch eine Leitlinie, eine Leitfläche und eine Richtebene gegeben, ſo könnte man wie

*) Es bietet ſich hier zugleich noch ein allgemeinerer Lehrſatz dar; nämlich: **Wenn ſich irgend zwei windſchiefe Flächen in drei Puncten, welche auf einerlei Mantellinie liegen, ſo berühren ſie ſich nach der ganzen Länge dieſer gemeinſchaftlichen Mantellinie;** denn es kommt ihnen ein gemeinſchaftliches Berührungshyperboloid zu, deſſen Leitende durch jene drei Puncte gehen und beide Flächen berühren.

im vorigen Falle verfahren, da die Leitfläche durch eine Leitcurve erſetzt werden kann, durch die Curve nämlich, welche auf der Leitfläche durch die Berührungspuncte der Mantellinien beſtimmt wird; ſtatt der Tangente dieſer Curve kann man aber auch durch den betreffenden Berührungspunct eine beliebige Tangente an die Leitfläche ziehen, weil jede ſolche Linie (nach §. 283) zugleich eine Tangente der windſchiefen Fläche ſelbſt ſein muß. Ein Beiſpiel hiezu liefert der folgende §.

§. 288.

Aufg. An ein Kugel-Conoid eine Berührungsebene zu legen, wenn der Berührungspunct gegeben iſt.

Aufl. Die Richtebene ſei die HE; (Ab, a′b′) die leitende Gerade; (o, o′) der Mittelpunct und o′t′ der Halbmeſſer der leitenden Kugel; q′ die V-Projection des Berührungspuncts Q. Fig. 109.

Nachdem die Umriſſe der Kugel gezeichnet ſind, projicire man (nach §. 261) die durch Q gehende Mantellinie (ct_1, c′t′), welche die Kugel in (t_1, t′) berührt, und führe ein hyperboliſches Paraboloid mit horizontaler Richtebene ein, welches nach jener Mantellinie in Berührung mit dem Kugel-Conoid ſteht. Die eine Leitende eines ſolchen Paraboloids iſt die Linie (Ab, a′b′); als zweite Leitende hat man irgend eine durch (t_1, t′) gehende Tangente der Kugel zu nehmen, wobei man am beſten thut, wenn man die Kugel als Drehungsfläche mit verticaler Axe betrachtet und die Tangente (ot_1, o″t′) des dem Berührungspuncte (t_1, t′) entſprechenden Meridians ſucht (vgl. §. 274, Aufl. II). Eine Ebene SXR′, welche das durch (Ab, a′b′), (ot_1, o″t′) und die HE beſtimmte Paraboloid in (q, q′) berührt, findet man nach §. 286, B, und dieſe Ebene iſt zugleich die verlangte Berührungsebene des Kugel-Conoids.

†) Läge der gegebene Berührungspunct auf der Geraden (Ab, a′b′), z. B. in (c, c′), ſo würde man zwei Berührungsebenen erhalten (nämlich eine beſondere für jeden der

beiden Flächenmäntel, welche ſich nach der AB ſchneiden). Die eine dieſer Ebenen wäre dann unmittelbar durch die Geraden (Ab, a'b') und (ct₁, c't') beſtimmt; die andere durch (Ab, a'b') und (ct₂, c't''). — *)

Berührungsebenen an Umhüllungsflächen.

§. 289.

Jede Berührungsebene einer Umhüllungsfläche berührt zugleich irgend eine Lage der umhüllten Fläche, und der Berührungspunct liegt auf der betreffenden Characteriſtik (vgl. Anm. zu §. 271). Iſt man daher im Stande, für einen auf der Umhüllungsfläche gegebenen Punct A die entſprechende Lage der umhüllten Fläche anzugeben (nämlich diejenige Lage, für welche die Characteriſtik durch A geht), ſo hat man, um die Berührungsebene der umhüllenden Fläche im Puncte A zu erhalten, die Berührungsebene der umhüllten für denſelben Punct zu ſuchen.

§. 290.

Auf dieſem Wege kann man namentlich für die Flächen zweiter Ordnung die Berührungsebenen leicht conſtruiren. Es wurde nämlich ſchon in §. 244 angegeben, inwiefern man dieſe Flächen (mit Ausnahme des hyperboliſchen Paraboloids) als Umhüllungsflächen beweglicher Kegel betrachten kann, und das dort Geſagte wird durch nachſtehende Betrachtung zu noch größerer Klarheit kommen.

Durch irgend zwei Lagen der Ellipſe, deren Bewegung eine Fläche zweiter Ordnung (nach §. 236) erzeugt, läßt ſich ein Kegel K legen, deſſen Spitze auf die Axe der feſten Fig. 99. Leitcurve fällt (§. 236, †). Es ſeien (bac, b'c'), (vuw, v'w') zwei ſolche Lagen und (o, o'') die Spitze des durch ſie gehenden Kegels K. Führt man durch die (o, o'o''), welche ſowohl für die leitende Curve als für die erzeugte Fläche F

*) Eine durch CT_1 und CT_2 gehende Ebene kann keine Berührungsebene ſein, weil dieſe beiden Linien auf verſchiedenen Mänteln der Fläche liegen.

Digitized by Google

eine Axe iſt, eine Anzahl von Ebenen, ſo wird jede derſelben die Fläche F nach einer Curve C und den Kegel K nach einer Geraden ſchneiden, von welcher ein Stück als Sehne in der Curve C liegt. Alle dieſe Sehnen der verſchiedenen Curven C werden kleiner und kleiner, wenn man die Ellipſe VW gegen die Ellipſe BC parallel fortbewegt, wobei natürlich auch der Kegel K ſeine Geſtalt und die Lage ſeiner Spitze auf (o, o′o″) ändert. Wenn endlich VW in BC fällt, ſind dieſe Sehnen alle gleichzeitig Null geworden, ſo daß ſich die Mantellinien, denen ſie angehörten, in Tangenten der Curven C verwandelt haben und alſo der Kegel K die Fläche F nach der Ellipſe BC berührt. Da man aber für BC jede beliebige Lage der erzeugenden Ellipſe nehmen kann und jeder ſolchen Lage ein beſonderer Berührungskegel entſpricht, ſo beſtätigt ſich die in §. 244 angegebene Entſtehung der Fläche F (gleichviel, ob F eines der Hyperboloide, oder ein Ellipſoid, oder ein elliptiſches Paraboloid iſt, da alles Obige ungeändert bleibt, wenn man in Fig. 99 an die Stelle der leitenden Hyperbel eine Ellipſe oder Parabel ſetzt).

†) Die berührenden Kegel gehen in paraboliſche Cylinder über, wenn die Fläche F ein hyperboliſches Paraboloid iſt. Betrachtet man die Parabel WV.. (Fig. 100) als feſt und TV.. als bewegliche Erzeugungsparabel der Fläche, ſo hat jeder ſolche Cylinder zur Leitenden irgend eine Lage der TV.. und die durch ihren Scheitel gehende Mantellinie des Cylinders berührt die WV. Dieß läßt ſich (mit Rückſicht auf §. 236, ††) in ganz ähnlicher Art nachweiſen, wie es oben für die Berührungskegel der übrigen Flächen zweiter Ordnung geſchah, nur mit dem Unterſchiede, daß die gebrauchten Schnittebenen, welche oben (Fig. 99) durch (o, o′o″) gelegt wurden, jetzt (Fig. 100) parallel mit der Ebene WV.. ſind.

§. 291.

Aufg. Ein Ellipſoid, von welchem zwei Hauptebenen den Grundebenen parallel ſind,

iſt durch ſeine beiden Umriſſe *) gegeben. Man ſoll an dasſelbe eine Berührungsebene legen, deren Berührungspunct oberhalb der horizontalen Hauptebene liegt und a zur H-Projection hat.

Fig. 115. Aufl. Die V-Projection a'' des Berührungspunctes A findet man wie in §. 238. Da b''c'' die V-Projection der durch A gehenden Lage ε der Erzeugungsellipſe iſt, ſo ſtellen zwei Tangenten, durch b'' und c'' an die Ellipſe v'b''w' gezogen, den verticalen Umriß des Kegels dar, welcher das Ellipſoid nach der Ellipſe ε berührt, und alſo wird die Berührungsebene dieſes Kegels für den Punct (a, a'') zugleich die geſuchte Berührungsebene des Ellipſoids ſein. Dieſe Ebene geht durch die Mantellinie (oa, o''a'') des Kegels; zu ihrer völligen Beſtimmung hat man ſich noch auf ſeinem Mantel irgend eine Curve zu verſchaffen und an dieſelbe eine Tangente durch den Punct zu ziehen, wo ſie von der (oa, o''a'') getroffen wird (vgl. §. 276). Verlängert man nun vv' und ww' bis ſie den verticalen Kegelumriß in x' und y' ſchneiden und betrachtet die Verbindungslinie x'y' (welche nothwendig parallel mit dem Grundſchnitt ſein muß) als die V-Spur einer zur HE parallelen Ebene, ſo ſchneidet dieſe Ebene den Kegel nach einer Ellipſe, welche der Ellipſe ε ähnlich iſt (§. 219) und deren eine Are die Länge vw hat; dieſe Ellipſe iſt mithin der (vuw, v'w') congruent und ihre H-Projection fällt mit vuw zuſammen. Eine Tangente (ut, z'T'), durch den Schnitt (u, z') der (oa, o''a'') und der Ellipſe (vuw, x'z'y') an letztere gezogen, fällt in die geſuchte Berührungsebene; daher ſind SQ (|| ut) und T'S' die Spuren dieſer Ebene.

Zuſ. Man ſieht leicht, daß man durch ganz ähnliche Conſtructionen die Berührungsebene eines elliptiſchen Paraboloids oder eines Hyperboloids (mit einem oder zwei Mänteln) erhalten kann.

Wie würde man nach Anleitung von §. 290. † an ein hyperboliſches Paraboloid eine Berührungsebene legen können?

*) d. i. durch die Projectionen der in jene Hauptebenen fallenden Schnitte.

Digitized by Google

B.) Berührungsebenen, parallel mit einer gegebenen Geraden.

§. 292.

Wird einer krummen Fläche F parallel mit einer Geraden G ein Cylinder C umſchrieben (§. 269), wobei die durch die Berührungspuncte der Mantellinien gehende Curve durch X bezeichnet ſein mag, ſo iſt jede Berührungsebene dieſes Cylinders auch eine Berührungsebene jener krummen Fläche; denn in ihrer erſten Eigenſchaft enthält ſie eine Mantellinie des Cylinders und eine Tangente der Curve X, und dieſe beiden Linien ſind zugleich Tangenten der Fläche F. (Die Fläche F und der Cylinder C berühren ſich alſo ſelbſt nach der Curve X.)

Es folgt hieraus, daß die Aufgabe, an die Fläche F eine Berührungsebene parallel mit einer gegebenen Geraden zu legen, im Allgemeinen eine unbeſtimmte iſt, und daß der Cylinder C die Umhüllungsfläche aller Lagen vorſtellt, welche die Berührungsebene einnehmen kann.

§. 293.

Obige Aufgabe wird aber eine beſtimmte für den beſondern Fall, wenn die gegebene Fläche F entwickelbar iſt. Jede entwickelbare Fläche läßt ſich nämlich als Umhüllungsfläche einer Ebene betrachten, welche ſich nach einem beſtimmten Geſetze bewegt, d. h. ſo, daß ſie nur noch eine willkührliche Bedingung erfüllen kann; dieſe Ebene (welche fortwährend eine Berührungsebene bleibt) iſt daher entweder auf eine einzige Lage oder doch auf eine Anzahl beſtimmter Lagen beſchränkt, wenn die Bedingung hinzutritt, daß ſie einer gegebenen Geraden parallel ſein ſoll.

Dieſe in beſtimmter Anzahl vorhandenen Berührungsebenen vertreten hier zugleich den umſchriebenen Cylinder C, und ſtatt der Curve X erſcheinen die Mantellinien der entwickelbaren Fläche, nach denen die Berührung ſtatt findet.

Digitized by Google

Zu näherer Erläuterung und Beſtätigung des Geſagten werden die folgenden Beiſpiele dienen.

§. 294.

Aufg. An eine durch Leitende und Erzeugende gegebene Cylinderfläche eine Berührungsebene parallel mit einer gegebenen Geraden G zu legen.

Aufl. Da die geſuchte Ebene eine Mantellinie des Cylinders enthält, ſo muß eine Ebene E, welche man parallel zur Erzeugenden durch G legt, parallel mit jener Ebene ſein. Ferner müſſen die Spuren der geſuchten Ebene die gleichnamigen Spuren der Cylinderfläche berühren (§. 276, †). Man hat demnach die Spuren der Ebene E zu beſtimmen (§. 49), eine Spur der Cylinderfläche zu zeichnen (§. 218) und an dieſe eine Tangente parallel mit der gleichnamigen Spur der E zu ziehen; dieſe Tangente iſt dann die eine Spur der geſuchten Ebene; die zweite iſt leicht hinzuzufügen, da ſie der zweiten Spur von E parallel iſt.

Die Berührungsebene iſt mehrerer Lagen fähig, wenn man an die Cylinderſpur mehrere Tangenten parallel mit der betreffenden Spur der E ziehen kann.

§. 295.

Aufg. An eine durch Leitende und Spitze gegebene Kegelfläche eine Berührungsebene parallel mit einer gegebenen Geraden G zu legen.

Aufl. Die Berührungsebene muß, weil ſie eine Mantellinie enthält, durch die Kegelſpitze gehen; und da ſie zugleich parallel mit G ſein ſoll, ſo muß eine durch die Kegelſpitze parallel mit G gelegte Linie P ganz in dieſe Ebene fallen. Eine Spur derſelben findet man alſo, wenn man eine der Kegelſpuren zeichnet und an dieſe eine Tangente aus der gleichnamigen Spur der P zieht (vgl. §. 276, †);

Digitized by Google

ihre zweite Spur ergiebt ſich durch die zweite Spur der P. (Laſſen ſich n Tangenten an die Kegelſpur aus der entſprechenden Spur der P ziehen, ſo giebt es n Ebenen, welche der Aufgabe genügen).

†) Iſt die Leitende der Kegelfläche eine ebene Curve, ſo kann man auch, um der Conſtruction der Kegelſpur auszuweichen, den Punct ſuchen, in welchem die P die Ebene der Leitenden trifft, aus dieſem Puncte eine Tangente T an die Leitende ziehen, und durch T und P eine Ebene führen, welche dann die verlangte Berührungsebene ſein wird.

§. 296.

Aufg. Eine entwickelbare Fläche hat zur Rückkehrcurve eine gegebene Schraubenlinie mit verticalſtehender Axe. Man ſoll an dieſe Fläche eine Berührungsebene parallel mit einer gegebenen Geraden G legen.

Aufl. Die Fläche kann keine andere ſein als die entwickelbare Schraubenfläche (§§. 247—249).

Ehe man noch die geſuchte Berührungsebene ſelbſt hat, läßt ſich ihre H-Neigung φ finden, da dieſe (nach §. 279, Zuſ.) der H-Neigung der Mantellinien gleich iſt. Legt man nun durch G eine Ebene unter der H-Neigung φ (§. 76), ſo iſt dieſe Ebene parallel mit der geſuchten, und letztere ſelbſt kann man demnach leicht erhalten, indem man noch berückſichtigt, daß ihre H-Spur die H-Spur der Schraubenfläche (d. i. die Evolvente des Kreiſes, in welchen ſich die Schraubenlinie projicirt) berühren muß.

(Man wird für die Berührungsebene deſto mehr Lagen erhalten, je weiter man die Kreisevolvente fortſetzt.)

§. 297.

Soll an eine krumme Fläche F, welche keine entwickelbare iſt, eine Berührungsebene parallel mit einer gegebenen Geraden G gelegt werden, ſo kann dieſe Ebene (wie ſchon in §. 292 bemerkt wurde) unendlich viele Lagen haben, und der geometriſche Ort ihres Berührungspunctes

iſt die Curve X, nach welcher die F von einem ihr umſchriebenen und mit G parallelen Cylinder berührt wird. Die Aufgabe läßt ſich zu einer beſtimmten dadurch machen, daß man verlangt, der Berührungspunct ſolle einer auf der Fläche gegebenen Curve angehören (denn dann ergiebt er ſich durch den Schnitt dieſer Curve und der X). Ohne eine ſolche beſondere Bedingung aber geht die Aufgabe, wenn ſie alle möglichen Auflöſungen umfaſſen ſoll, eigentlich in folgende über: *Der Fläche F einen berührenden Cylinder parallel mit einer gegebenen Geraden zu umſchreiben und die Curve X der Berührung zu finden* *).

Dieſe Curve X wird in den meiſten Fällen eine gewundene ſein. *Iſt aber die gegebene Fläche von der zweiten Ordnung, ſo iſt die Curve X immer eben und mithin eine Linie zweiter Ordnung; ihre Ebene iſt eine Diametralebene und dem mit G parallelen Durchmeſſer der Fläche zugeordnet.* (S. Anhang, II, 2).

§. 298.

Es iſt hier am Orte, eine allgemeine Methode anzugeben, wie man für jede gegebene Fläche die *Umriſſe* finden kann. *Der {horizontale / verticale} Umriß einer Fläche iſt nämlich die {H / V}-Spur eines Cylinders, welcher der Fläche*

*) Dieſe Aufgabe und die verwandte: *einer Fläche einen Kegel aus einem gegebenen Puncte zu umſchreiben*, finden ihre unmittelbare Anwendung in der *Schattentheorie*, wenn die Grenze des Schattens auf einem krummflächigen Körper zu beſtimmen iſt, welcher entweder durch parallele (Sonnen-) Strahlen oder von einem Puncte aus beleuchtet wird.

Der Weg zur *allgemeinen* Auflöſung beider Aufgaben iſt bereits in §. 269 angedeutet. Beſondere Beiſpiele, welche eine einfachere Behandlung zulaſſen, werden in den folgenden §§ betrachtet.

ſo umſchrieben iſt, daß ſeine Mantellinien ſenkrecht auf der $\left\{\begin{smallmatrix}H\\V\end{smallmatrix}\right\}$-Ebene ſtehen. Die Curve, in welcher dieſer Cylinder die Fläche berührt, iſt in Beziehung auf die $\left\{\begin{smallmatrix}H\\V\end{smallmatrix}\right\}$-Ebene die Grenze zwiſchen dem ſichtbaren und unſichtbaren Theile der Fläche.

Hiernach muß die $\left\{\begin{smallmatrix}H\\V\end{smallmatrix}\right\}$-Spur jeder zur $\left\{\begin{smallmatrix}H\\V\end{smallmatrix}\right\}$-Ebene ſenkrechten Berührungsebene der Fläche eine Tangente des $\left\{\begin{smallmatrix}\text{hor.}\\\text{vert.}\end{smallmatrix}\right\}$ Umriſſes ſein; denn dieſe Ebene iſt zugleich eine Berührungsebene jenes Cylinders.

§. 299.

Aus Vorſtehendem laſſen ſich einige Lehrſätze ableiten, auf welche man bei der Auflöſung ſpäterer Aufgaben Rückſicht zu nehmen hat.

I.) Iſt auf einer krummen Fläche irgend eine ſtetige Curve Y ſo gezogen, daß ſie in Beziehung auf eine Grundebene ſich ſowohl über den unſichtbaren als den ſichtbaren Theil der Fläche erſtreckt, ſo berührt ihre Projection den gleichnamigen Umriß der Fläche. Denn berührt eine zur Grundebene ſenkrechte Ebene die Fläche in einem Puncte P der Curve Y, ſo fällt die Projection der durch P an Y gezogenen Tangente in die Spur dieſer Ebene, und dieſe Spur berührt (nach §. 298) den Umriß der Fläche, iſt alſo eine gemeinſchaftliche Tangente dieſes Umriſſes und der Projection von Y.

II.) Wird eine Fläche F von irgend einer andern ihr umſchriebenen Fläche $\mathfrak{F}$ in einer Curve Y berührt, und beide Flächen liegen gegen das Grundſyſtem ſo, daß ſie Umriſſe zulaſſen, ſo berührt der Umriß der Fläche $\mathfrak{F}$ den gleichnamigen Umriß der Fläche F.

III.) Unter den nämlichen Vorausſetzungen werden zugleich die Umriſſe beider Flächen in ihren gemeinſchaftlichen Puncten von der gleichnamigen Projection der Berührungscurve Y berührt.

Digitized by Google

Für II und III ergiebt ſich der Beweis aus I; denn iſt P derjenige Punct der Curve Y, für welchen die gemeinſchaftliche Berührungsebene der Flächen F und 𝔉 ſenkrecht zur Grundebene ſteht, ſo muß in der Projection von P ſowohl der Umriß der F als der Umriß der 𝔉 von der Projection der Y berührt werden, weil Y ſowohl auf F als auf 𝔉 liegt. (Vgl. Fig. 109, 116—118).

§. 300.

Aufg. Eine Ebene zu finden, welche eine gegebene Drehungsfläche in einem beſtimmten Parallelkreiſe berührt und mit einer gegebenen Geraden parallel iſt.

Fig. 116. Aufl. Die Drehungsfläche ſei durch die verticalſtehende Axe (o, o′o″) und den Hauptmeridian (vw, a′v′w′) gegeben; (gh, g′h′) ſei die gegebene Gerade, (mfn, m′n′) der gegebene Parallelkreis.

Die geſuchte Ebene wird zugleich einen Kegel K berühren, welcher der Drehungsfläche nach dem Parallelkreis (mfn, m′n′) umſchrieben werden kann (vgl. §. 244); deshalb läßt ſich die Aufgabe auf die des §. 295 zurückführen.

Die Spitze des Kegels liegt auf der Drehungsaxe; ſein verticaler Umriß beſteht aus den durch m′ und n′ an die Curve a′v′w′ gelegten Tangenten m′k′, n′k″. Zieht man durch die Spitze eine Parallele P zu GH und aus dem Puncte, wo ſie die Ebene des Parallelkreiſes trifft, Tangenten an letztere, ſo beſtimmen dieſe mit der Linie P zwei Ebenen, deren jede für die verlangte Berührungsebene genommen werden kann (vgl. §. 295, †); ihre Berührungspuncte ſind die Puncte, in denen die erwähnten Tangenten den Parallelkreis berühren.

Fällt die Kegelſpitze in zu große Entfernung (wie es in der That bei Fig. 116 der Fall iſt), ſo rücke man den Kegel, ohne ihn zu drehen oder zu neigen, abwärts, ſo daß ſeine Spitze in einen tiefer liegenden Punct der Drehungsaxe, z. B. in (o, o′), trifft (wobei offenbar die Linien ſeines verticalen Umriſſes q′o′r′ parallel mit den Tangenten

m'k', n'k'' bleiben), beſtimme ſeine neue H-Spur qyr, ziehe (oS, o's') || (gh, g'h') und lege durch die H-Spur S der erſtern Linie Tangenten Sx, Sy an qyr. Dann ſind ox, oy die H-Projectionen der Mantellinien, in denen die neue Stellung des Kegels von zwei mit (gh, g'h') parallelen Ebenen berührt wird. Rückt man hierauf den Kegel in ſeine urſprüngliche Stellung zurück, ſo bewegen ſich jene beiden Mantellinien in ihren h-projicirenden Ebenen fort und behalten alſo ihre H-Projectionen unverändert bei. Daher ſind die Puncte e, f, wo dieſe die H-Projection mfn des gegebenen Parallelkreiſes treffen, die H-Projectionen und e', f' die zugehörigen V-Projectionen der Puncte, in denen die gegebene Drehungsfläche von den verlangten Ebenen berührt wird. Die Spuren dieſer Ebenen laſſen ſich auf verſchiedenen Wegen leicht hinzufügen.

Zuſ. Die Art, wie man die Berührungsebenen fand, zeigt, daß es nie mehr als zwei derſelben geben kann, welche Form auch die gegebene Drehungsfläche haben mag; denn die Lage dieſer Ebenen hängt weſentlich von den Tangenten eines Kreiſes ab, welche an ihn von einem außer ihm gelegenen Puncte gezogen werden, und deren ſind nur zwei möglich.

Geht die Kegelſpur qyr durch S (in welchem Falle ſich ox und oy mit oS vereinigen), ſo giebt es nur eine Berührungsebene; gar keine, wenn jene Spur den Punct S einſchließt.

§. 301.

Aufg. Eine Ebene zu finden, welche eine gegebene Drehungsfläche in einem beſtimmten Meridiane berührt und mit einer gegebenen Geraden GH parallel iſt.

Aufl. Die Drehungsfläche ſei auf dieſelbe Art wie vorhin gegeben; die H-Projection des Meridians habe die Richtung of. Fig. 116.

Denkt man ſich nach dieſem Meridiane einen Cylinder um die Drehungsfläche beſchrieben, indem man den Meri-

dian als Leitende betrachtet und die Mantellinien ſenkrecht zu ſeiner Ebene annimmt (vgl. §. 243), ſo wird die geſuchte Ebene zugleich eine Berührungsebene dieſes Cylinders ſein, und die Aufgabe kommt auf §. 204 zurück.

Durch einen Punct der Drehungsaxe, z. B. durch (o, o′), ziehe man eine Parallele OS zu GH und durch deren H-Spur S eine Senkrechte Sy zu of. Dann iſt die Ebene, welche durch die Linien OS und Sy beſtimmt wird, parallel mit der geſuchten Berührungsebene, und die Linie Oy (nach welcher jene erſtere Ebene die Meridianebene ſchneidet) parallel mit dem Schnitt der Meridianebene und Berührungsebene. Dieſer Schnitt iſt aber eine Tangente des Meridians und der Berührungspunct derſelben giebt zugleich den Berührungspunct für die geſuchte Ebene. Damit man nun die V-Projection des Meridians nicht zu zeichnen braucht, drehe man ſeine Ebene, bis ſie in die des Hauptmeridians fällt; dadurch kommt die Linie Oy in die Lage (or, o′r′); eine mit (or, o′r′) parallele Tangente des Hauptmeridians hat den Berührungspunct (n′, n), welcher nach Zurückbewegung des Meridians die Lage (f, f′) einnimmt und hier den Berührungspunct einer Ebene vorſtellt, welche die Forderung der Aufgabe erfüllt. Die Spuren dieſer Ebene ſind leicht nachzubringen. *)

§. 302.

Fig. 116. Aufg. Einer Drehungsfläche, welche durch die (verticalſtehende) Axe (o, o′o″) und den Hauptmeridian (vw, a′v′w′) gegeben iſt, einen Cylinder

*) In Fig. 116 iſt die Curve a′v′w′ eine Ellipſe; deshalb giebt es noch eine zweite mit o′r′ parallele Tangente t′u′ und mithin auch eine zweite Lage für die verlangte Ebene. Die Berührungspuncte n′, t′ paralleler Tangenten liegen auf einem Durchmeſſer der Ellipſe; daraus folgt n′α′ = t′β′, und daher müſſen die zwei Parallelkreiſe, auf welche die Berührungspuncte (f, f′), (f. f′) für beide Lagen der Ebene fallen, eine gemeinſchaftliche H-Projection nfmf haben.

Digitized by Google

parallel mit der Geraden (gh, g'h') zu umſchreiben und die Berührungscurve zu conſtruiren.

Aufl. Als Beiſpiel iſt ein Ellipſoid gewählt; doch bleibt das im Folgenden angegebene Verfahren bei allen Drehungsflächen im Weſentlichen daſſelbe.

Zwei mit g'h' parallele Tangenten der Ellipſe a'v'w' bilden den verticalen Umriß des umſchriebenen Cylinders (§. 299, II) und die Berührungspuncte a', b' gehören der V-Projection der Berührungscurve an. Die zugehörigen (auf vw gelegenen) H-Projectionen a, b ſind zwei Puncte für die H-Projection dieſer Curve. Bemerkt man, daß der horizontale Umriß des Ellipſoids die H-Projection des Äquators iſt (welchem als V-Projection die Axe v'w' der Ellipſe a'v'w' zukommt), ſo erhält man auf ähnliche Weiſe den horizontalen Umriß des Cylinders und zwei neue Puncte (c, c'), (d, d') der Berührungscurve.

Um nun noch beliebig viele andere Puncte der Curve zu finden, löſe man wiederholt die Aufgabe des §. 300 in Bezug auf verſchiedene Parallelkreiſe, oder auch die Aufgabe des §. 301 für mehrere Meridiane (wobei man natürlich immer nur auf die Berührungspuncte der dort verlangten Ebenen Rückſicht nimmt). *)

Macht man im erſtern Falle Gebrauch von jener Rückung des Hülfskegels K, und zwar ſo, daß die Spitzen der den verſchiedenen Parallelkreiſen entſprechenden Kegel immer in den nämlichen Punct (o, o') verſetzt werden, ſo gilt die Linie (oS, o's') für alle dieſe Kegel zugleich. Die H-Spuren der Kegel ändern ſich; aber an alle hat man von S aus Tangenten zu legen, deren Berührungspuncte mithin alle in den über oS beſchriebenen Kreis fallen; zeichnet man dieſen Kreis zum Voraus, ſo braucht man die Tangenten ſelbſt gar nicht zu ziehen, weil ſich die Berührungs-

---

*) Auf der Zeichnungsebene hat man (wie die Vergleichung der §§. 300 und 301 zeigt) in dem einen Falle ganz dieſelben Conſtructionen auszuführen, wie im andern, nur in veränderter Ordnung.

Digitized by Google

puncte durch die Schnitte des Kreiſes und der Kegelſpuren ergeben.

Aus §. 300, Zuſ. geht hervor, daß im Allgemeinen jeder Parallelkreis zwei Puncte der Berührungscurve trägt, daß aber auf gewiſſe Parallelkreiſe gar keine Puncte fallen können. Die Grenzen, zwiſchen denen die Curve eingeſchloſſen iſt, ſind jene Parallelkreiſe, welche nur je einen Punct mit ihr gemein haben; dieſe Parallelkreiſe müſſen die Curve berühren, und ihre Projectionen berühren die gleichnamigen Curvenprojectionen; man findet ſie wie folgt. Derjenige Hülfskegel, deſſen H-Spur nach der Rückung durch S geht, hat $\gamma'o'\delta'$ als verticalen Umriß für ſeine gerückte Stellung, und den Umriß $\varphi'\xi'\psi'$ oder $\varphi''\xi''\psi''$ für ſeine urſprüngliche Stellung erhält man durch Tangenten, welche parallel zu $o'\gamma'$ und $o'\delta'$ an $a'v'w'$ gezogen ſind; daher iſt ſowohl $\varphi'\psi'$ als $\varphi''\psi''$ die V-Projection eines Parallelkreiſes, in welchem das Ellipſoid nur von einer mit GH parallelen Ebene berührt wird, und zwar in einem Puncte, deſſen H-Projection auf oS liegen muß (§. 300, Zuſ.). Dem Obigen gemäß ſtellen daher $\varphi'\psi'$ und $\varphi''\psi''$ zwei Tangenten für die V-Projection der geſuchten Berührungscurve vor, zwiſchen denen dieſe Projection enthalten iſt. Da (wie leicht zu zeigen) $\varphi'\psi' = \varphi''\psi''$ ſein muß, ſo haben die erwähnten zwei Parallelkreiſe eine gemeinſchaftliche H-Projection $\varphi\omega\psi\pi$; die auf ihnen liegenden Puncte der Berührungscurve (der höchſte und tiefſte) ſind (ω, ω') und (π, π'). Es iſt rathſam, mit der Beſtimmung dieſer Puncte die Conſtruction der Curve zu beginnen.

Zuſ. Die Sehne zwiſchen irgend zwei auf einerlei Parallelkreis liegenden Puncten E, F der Berührungscurve wird von der durch oS gehenden verticalen Ebene ſenkrecht halbirt (wie ſich aus Fig. 116 leicht beweiſen läßt). **Daher theilt die durch die Drehungsaxe parallel zu GH gelegte Ebene (oS) die Berührungscurve immer in zwei ſymmetriſche Hälften.**

§. 303.

Aufg. Einer Fläche zweiter Ordnung einen Cylinder parallel mit einer Geraden GH zu umſchreiben.

Aufl. Die Fläche ſei ein Ellipſoid; die Grundebenen ſind parallel mit zwei Hauptebenen desſelben angenommen. Fig. 117.

Die Umriſſe des Cylinders und vier Puncte (a′, a), (b′, b), (c, c′), (d, d′) der Berührungscurve, welche paarweiſe in der verticalen und horizontalen Hauptebene liegen, findet man eben ſo wie in §. 302.

Die beiden Puncte der Berührungscurve, welche auf die in m′n′ v-projicirte Lage der Erzeugungsellipſe fallen, ſind mit Hülfe eines Kegels zu erhalten, welcher nach dieſer Ellipſe dem Ellipſoid umſchrieben iſt und ſeine Spitze in der verticalen Axe (o, o′o″) des letztern hat (§. 290); ſein verticaler Umriß beſteht aus den Tangenten m′o″, n′o″ des Ellipſoid-Umriſſes. Schneidet man dieſen Kegel durch eine horizontale Ebene x′y′ ſo, daß die H-Projection des Schnittes mit dem horizontalen Umriſſe vdw des Ellipſoids zuſammenfällt (vgl. §. 291), und zieht aus dem Puncte (t, t′), in welchem die Ebene x′y′ von einer durch die Kegelſpitze (o, o″) parallel zu (gh, g′h′) gelegten Geraden (ot, o″t′) geſchnitten wird, an die Ellipſe (vdw, x′y′) Tangenten, ſo führen deren Berührungspuncte (q, q′), (r, r′) auf zwei Mantellinien (oq, o″q′), (or, o″r′) des Kegels, nach welchen er von zwei zu GH parallelen Ebenen berührt wird. Die Puncte, in denen dieſe beiden Ebenen das Ellipſoid berühren, ſind die Schnitte der genannten Mantellinien mit der in m′n′ v-projicirten Ellipſe und gehören der geſuchten Berührungscurve an. Man findet zunächſt ihre V-Projectionen e′, f′ und aus dieſen auch die H-Projectionen e, f.

Indem man für die Linie m′n′ nach und nach andere Lagen annimmt, erhält man ſo viele Puncte der Berührungscurve, als man zu ihrer Conſtruction nöthig hat. — Fällt der Punct t auf die Peripherie der Ellipſe vdw, ſo giebt es nur eine mit GH parallele Berührungsebene des Hülfs-

Digitized by Google

kegels, alſo auf der entſprechenden Lage von m'n' nur einen Punct für die V-Projection der Berührungscurve, und dieſer Punct iſt entweder der höchſte oder tiefſte.

Zuſ. Iſt ſtatt eines Ellipſoids ein Hyperboloid oder elliptiſches Paraboloid gegeben, ſo läßt ſich die Aufgabe durch die nämlichen Conſtructionen löſen. Für ein hyperboliſches Paraboloid hat man ſtatt der umſchriebenen Kegel umſchriebene Cylinder zu Hülfe zu nehmen (vgl. §. 290, †).

C.) Berührungsebenen, welche durch einen außerhalb der Fläche gegebenen Punct gehen.

§. 304.

Die Aufgabe, an eine Fläche F eine Berührungsebene durch einen außerhalb gegebenen Punct P zu legen, iſt (wenn nicht noch eine anderweitige Bedingung hinzukommt) im Allgemeinen eine unbeſtimmte; denn es genügt ihr jede Ebene, welche den der Fläche aus P umſchriebenen Kegel K berührt.

Nur wenn die Fläche F entwickelbar iſt, wird die Aufgabe eine beſtimmte, wie aus der allgemeinen Erörterung des §. 293 folgt. In dieſem Falle wird der umſchriebene Kegel K durch eine oder mehrere Berührungsebenen erſetzt.

§. 305.

Der Kegel K, welcher irgend einer Fläche F aus dem Puncte P umſchrieben iſt, berührt dieſe Fläche in einer ſtetigen Curve X, und dieſe ſtellt den geometriſchen Ort für den Berührungspunct einer durch P gehenden Berührungsebene vor.

Iſt F eine Fläche zweiter Ordnung, ſo iſt X eine Linie zweiter Ordnung und ihre Ebene iſt dem nach P gerichteten Durchmeſſer der Fläche zugeordnet. (S. Anhang, II, 1).

Digitized by Google

§. 306.

Aufg. An eine Cylinderfläche, für welche man Leitende und Erzeugende kennt, eine Berührungsebene durch einen außerhalb gegebenen Punct P zu legen.

Aufl. Eine Gerade H, durch P parallel zur Erzeugenden gelegt, fällt ganz in die geſuchte Ebene, indem letztere eine Mantellinie enthält (§. 2, VI). Die Spuren der Ebene gehen daher durch die Spuren der H und berühren die gleichnamigen Cylinderſpuren; man kann ſie alſo leicht erhalten, wenn man eine der Cylinderſpuren conſtruirt.

Iſt die Leitende eben, ſo kann man auch aus dem Puncte, wo ihre Ebene von der H geſchnitten wird, eine Tangente T an ſie ziehen und durch T und H eine Ebene führen; dadurch wird die Cylinderſpur entbehrlich.

§. 307.

Aufg. An eine Kegelfläche, deren Leitende und Spitze gegeben ſind, eine Berührungsebene durch einen außerhalb angenommenen Punct P zu legen.

Aufl. Verbinde P mit der Kegelſpitze durch eine Gerade H und lege durch dieſe eine Ebene, deren eine Spur die gleichnamige Kegelſpur berührt.

Die Conſtruction der Kegelſpur kann wegbleiben, wenn die Fläche eine ebene Leitende hat (vgl. §. 295, †).

§. 308.

Aufg. An eine entwickelbare Schraubenfläche eine Berührungsebene durch einen außerhalb gegebenen Punct P zu legen.

Aufl. Die Fläche ſei durch ihre Rückkehrcurve gegeben, deren Axe vertical ſtehen ſoll.

Die H-Neigung der geſuchten Berührungsebene ſtimmt mit der H-Neigung φ der Mantellinien überein (§. 279, Zuſ.), iſt alſo zum Voraus bekannt. Zieht man durch P eine Ge-

rade, welche dieſelbe H-Neigung φ hat und betrachtet ſie als die Erzeugende eines Drehungskegels, deſſen Axe das h-projicirende Loth Pp iſt, ſo muß unter den Berührungsebenen dieſes Kegels (denen allen die H-Neigung φ zukommt) auch die geſuchte Berührungsebene der Schraubenfläche ſein. Die H-Spur derſelben iſt demnach eine gemeinſchaftliche Tangente der horizontalen Kegelſpur und der H-Spur der Schraubenfläche, und kann gezeichnet werden, ſobald man dieſe beiden Spuren gezeichnet hat; die Kegelſpur iſt ein um die H-Projection p des Punctes P beſchriebener Kreis, deſſen Halbmeſſer man leicht findet; die Spur der Schraubenfläche erhält man durch Evolution des Kreiſes, welcher die H-Projection der Rückkehrcurve vorſtellt. Die Berührungsebene iſt durch ihre H-Spur und den Punct P hinreichend beſtimmt, ſo daß man nun auch ihre V-Spur leicht hinzufügen kann.

Man wird in der Regel mehrere Berührungsebenen erhalten. Aber nicht jede gemeinſchaftliche Tangente obiger beiden Flächenſpuren kann für die H-Spur einer ſolchen Ebene gelten; denn es iſt wohl zu beachten, daß die beiden Mantellinien, in denen der Kegel und die Schraubenfläche berührt werden, parallel ſind, und daß alſo die H-Projectionen derjenigen Stücke, welche von beiden Mantellinien auf einerlei Seite der HE fallen, auch nach einerlei Seite der gemeinſchaftlichen Tangente gerichtet ſein müſſen.

§. 309.

Aufg. Eine Ebene berühre eine Drehungsfläche in einem beſtimmten Parallelkreiſe und gehe durch einen außerhalb gegebenen Punct P; man verlangt den Berührungspunct.

Fig. 118. Aufl. Die Fläche ſei durch ihre Axe (o, o′o″) (zu welcher die HE ſenkrecht angenommen iſt) und ihren Hauptmeridian (vw, v′b′w′) gegeben. Der Parallelkreis, auf welchem der Berührungspunct liegen ſoll, ſei (mfn, m′n′).

Die fragliche Ebene muß zugleich den Kegel berühren, welcher der Drehungsfläche nach dem Parallelkreiſe (mfn, m′n′) umſchrieben iſt und als verticalen Umriß die Tangenten m′k′,

h'k'' der Curve v'b'w' hat. Eine durch P gelegte horizontale Ebene ſchneidet dieſen Kegel nach dem Kreiſe (q'r', qyrx) und die Berührungsebene nach einer von P ausgehenden Tangente dieſes Kreiſes (§. 276, †), für deren H-Projection man entweder px oder py erhält, woraus zu erſehen, daß zwei Ebenen der Forderung der Aufgabe entſprechen. Die Mantellinien des Hülfskegels, nach denen jene Ebenen ihn berühren, haben die H-Projectionen oex, ofy; die Puncte (e, e'), (f, f'), wo dieſe Mantellinien den Parallelkreis (mfn, m'n') ſchneiden, ſind die verlangten Berührungspuncte.

Zuſ. Die Aufgabe kann immer nur durch höchſtens zwei Puncte gelöſt werden, und dieſe liegen ſo, daß ihre (horizontale) Verbindungslinie von der durch P und die Drehungsaxe geführten Ebene ſenkrecht halbirt wird.

Beide Puncte fallen in einen zuſammen, wenn der Kreis qyr durch p geht; und ſie werden imaginär, wenn p innerhalb dieſes Kreiſes liegt.

§. 310.

Aufg. Auf einem beſtimmten Meridiane einer gegebenen Drehungsfläche einen Punct zu finden, für welchen die Berührungsebene der Fläche durch einen außerhalb gegebenen Punct P geht.

Aufl. Die Fläche ſei wie in §. 309 gegeben; der Meridian habe die H-Projection of. Fig. 118.

Ein Cylinder, welcher den gegebenen Meridian als Leitende und eine zur Meridianebene ſenkrechte Erzeugende hat, wird von der geſuchten Ebene berührt, ſo daß es möglich iſt, die Aufgabe auf §. 306 zurückzuführen. Man kann aber auch dieſen Cylinder außer Acht laſſen und dafür von der Bemerkung ausgehen, daß die Berührungsebene 1.) ſenkrecht auf der Ebene des gegebenen Meridians ſteht (§. 273, a), mithin durch eine aus P auf letztere gefällte Senkrechte PY geht, und 2.) die Meridianebene in einer Tangente der Meridiancurve ſchneiden muß. Die H-Projection der PY iſt py (⊥ of), die V-Projection q'r' (|| GS). Dreht

man die Meridianebene bis ſie parallel zur VE wird, ſo kommt der Fußpunct Y nach (r, r′); zwei aus (r, r′) an die neue Lage des Meridians gezogene Tangenten berühren dieſen in den Puncten (n′, n), (t′, t), welche bei Zurückführung der Meridianebene in ihre eigentliche Stellung die Lagen (f, f′), (g, g′) erhalten. Von den Puncten (f, f′), (g, g′) kann jeder für den geſuchten Berührungspunct genommen werden. *)

§. 311.

Aufg. Einer gegebenen Drehungsfläche einen Kegel aus einem gegebenen Puncte P zu umſchreiben und die Berührungscurve zu conſtruiren.

Fig. 118. Aufl. Iſt (o, o′o″) die (verticalſtehende) Axe und (v′w, v′b′w′) der Hauptmeridian der Fläche, ſo erhält man zwei auf letzterem liegende Puncte (a′, a), (b′, b) der geſuchten Berührungscurve mit Hülfe der Tangenten p′a′, p′b′ an v′b′w′, welche zugleich den verticalen Umriß des Kegels darſtellen. Auf ähnliche Weiſe ergeben ſich zwei Puncte (c, c′), (d, d′), deren H-Projectionen auf dem horizontalen Umriß der Fläche liegen, und der horizontale Umriß cpd des Kegels. Beliebig viele andere Puncte findet man nach §. 309 oder nach §. 310.

Bei wiederholter Löſung der Aufgabe des §. 309 hat man aus p an die H-Projectionen verſchiedener Parallelkreiſe Tangenten zu ziehen, oder eigentlich nur die Berührungspuncte derſelben zu beſtimmen; dieſe Puncte liegen alle in dem über op beſchriebenen Kreiſe.

Wie man (auf den Grund einer in §. 309, Zuſ. enthaltenen Bemerkung) den höchſten Punct (ω, ω′) der Berührungscurve und den tiefſten (π, π′) finden könne, zeigt die Figur.

---

*) Wie viele Lagen der geſuchte Punct haben kann, hängt immer von der Geſtalt des Meridians ab.

Digitized by Google

Zuſ. Aus §. 309, Zuſ. folgt, daß die Berührungscurve von einer durch die Drehungsaxe und durch P gelegten Ebene immer in ſymmetriſche Hälften getheilt wird.

§. 312.

Aufg. Einer Fläche zweiter Ordnung einen Kegel aus einem gegebenen Puncte P zu umſchreiben.

Die Auflöſung dieſer Aufgabe ſtimmt faſt ganz mit der Löſung der frühern in §. 303 überein; nur daß man hier immer die Linie (ot, o″t′) (Fig. 117) durch Verbindung des gegebenen Punctes P mit der Spitze des Hülfskegels erhält.

D.) Berührungsebenen, welche durch eine gegebene Gerade gehen.

§. 313.

Eine Ebene, welche eine Fläche F berührt und zugleich durch eine (ganz außerhalb der Fläche liegende) Gerade G geht, muß offenbar jeden Kegel berühren, welcher der Fläche F aus irgend einem Puncte der G umſchrieben iſt, und eben ſo den parallel mit G ihr umſchriebenen Cylinder. Hiernach hat man zur Auffindung einer ſolchen Ebene folgende verſchiedene Wege.

1.) Umſchreibt man der Fläche F aus zwei beliebigen Puncten der G zwei Kegel, welche die F in den Curven X und X′ berühren, ſo giebt der Schnitt dieſer beiden Curven den Berührungspunct der geſuchten Ebene.

2.) Wird der Fläche ein Cylinder parallel mit G und ein Kegel aus irgend einem Puncte der G umſchrieben, ſo ſchneiden ſich die beiden Berührungscurven in dem geſuchten Berührungspuncte.

3.) Man umſchreibe der Fläche einen Kegel aus einem beliebigen Puncte der G und lege an dieſen Kegel eine Berührungsebene durch G.

Digitized by Google

4.) Man umſchreibe der Fläche einen Cylinder parallel mit G und lege an ihn durch G eine Berührungsebene.

§. 314.

Eine Ebene, welche durch eine gegebene Gerade G geht, kann nur noch eine Bedingung erfüllen, und iſt daher beſtimmt, wenn ſie eine gegebene Fläche F berühren ſoll.

Sind für eine ſolche Berührungsebene n beſtimmte Lagen möglich, ſo entſprechen dieſen Lagen n beſtimmte Berührungspuncte auf der Fläche F. Auf dieſe n Puncte muß man immer kommen, wie man auch die Spitzen der in §. 313, 1 erwähnten Kegel in G wählen mag, und hieraus folgt der Lehrſatz:

Wenn man die Spitze eines Kegels, welcher einer gegebenen Fläche F umſchrieben iſt, in einer außerhalb der Fläche liegenden Geraden G fortſchreiten läßt, ſo ändert ſich fortwährend die Berührungscurve, geht aber immer durch eine beſtimmte Anzahl feſter Puncte. Dabei kann die Kegelſpitze auch in unendliche Entfernung fallen oder der Kegel in einen Cylinder übergehen, deſſen Mantellinien mit G parallel ſind (vgl. §. 313, 2).

§. 315.

Iſt die Fläche F entwickelbar, ſo iſt es im Allgemeinen nicht möglich, an ſie eine Berührungsebene durch eine gegebene Gerade G zu legen. Denn die Berührungsebene einer entwickelbaren Fläche iſt ſchon beſtimmt, wenn ſie durch einen gegebenen Punct der G gehen ſoll (§. 304), und die übrigen Puncte der G werden dann in der Regel nicht in dieſe Ebene fallen.

(In §. 313, 3. 4 hat die Gerade G gegen die entwickelbare Fläche eine ſolche Lage, daß die Aufgabe ausnahmsweiſe lösbar iſt).

Digitized by Google

§. 316.

Aufg. An eine gegebene Kugel eine Berührungsebene durch eine gegebene Gerade GH′ zu legen.

Beide Grundebenen ſeien durch den Mittelpunct O der Kugel gelegt, ſo daß in der Zeichnungsebene die beiden Umriſſe ſich decken.

Aufl. I. Jeder Kegel, welcher einer Kugel umſchrieben iſt, berührt dieſe nach einem Kreiſe, deſſen Mittelpunct mit dem Kugelmittelpunct und der Kegelſpitze in gerader Linie liegt und deſſen Ebene ſenkrecht auf dieſer Linie iſt. *) Verſetzt man die Spitze eines ſolchen Kegels in die H-Spur G der gegebenen Geraden GH′, ſo ſind die Tangenten GA, GB der horizontale Umriß des Kegels und die Sehne AB die H-Projection (und zugleich der Durchmeſſer) des Berührungskreiſes. Die Ebene dieſes Kreiſes ſchneidet die GH′ im Puncte T und die geſuchte Berührungsebene in einer durch T gehenden Tangente desſelben, deren Berührungspunct zugleich der Berührungspunct der verlangten Ebene iſt (§. 270, †). In der horizontalen Umklappung der Kreisebene AB kommt T nach T_1 zu liegen (§. 57, †); eine aus T_1 an den umgeklappten Kreis gezogene Tangente berührt letzteren in dem Puncte R′, deſſen Lage nach der Zurückbewegung der Kreisebene den geſuchten Berührungspunct vorſtellt. Die Projectionen dieſer Lage erhält man, wenn man $R_1r \perp AB$, $rr' \perp$ GS fällt und $mr'' = R_1r$ macht. Aus T_1 geht aber an die Kreis-Umklappung AR_1B noch eine zweite Tangente T_1S_1, und dieſe führt auf ähnliche Weiſe zu einer zweiten Lage (s, s′) des geſuchten Punctes. Fig. 119.

Die Spuren der beiden Ebenen, welche die Kugel in den Puncten (r, r′) und (s, s′) berühren, gehen von G und H′ aus und ſtehen ſenkrecht auf den gleichnamigen Projectionen der Halbmeſſer OR und OS. (Zugleich müſſen die

---

*) Zum Beweiſe drehe man einen Kreis, an welchen zwei Tangenten gezogen ſind, um den nach dem Schnittpuncte der Tangenten gerichteten Durchmeſſer.

Digitized by Google

H-Spuren durch die H-Spuren der Tangenten TS, TR gehen, d. i. durch die Schnitte der AB mit T_1S_1 und T_1R_1.)

Fig. 119. Aufl. II. Außer dem vorhin betrachteten Kegel umſchreibe man der Kugel einen zweiten aus der V-Spur H′ der gegebenen Geraden. Dieſer berührt die Kugel nach einem Kreiſe, deſſen V-Projection C′D′ iſt. Die Berührungspuncte der geſuchten Ebenen ſind die Schnittpuncte der beiden Berührungskreiſe AB und C′D′, oder (was daſſelbe iſt) die Puncte, in denen der eine Kreis AB von der Ebene des andern geſchnitten wird. Nun ſchneiden ſich beide Kreisebenen nach einer Geraden, deren Projectionen in AB und C′D′ liegen; klappt man daher die Linie (AB, C′D′) mit ihrer h-projicirenden Ebene um (§§. 31, 56) und zugleich den Kreis AB, welcher in dieſer Ebene liegt, ſo ſchneidet die umgeklappte Gerade den umgeklappten Kreis in den Puncten R_1, S_1, deren Lagen nach Zurückbewegung der projicirenden Ebene die geſuchten Berührungspuncte ſind. Die H-Projectionen r, s dieſer Lagen findet man wie vorhin; die V-Projectionen r′, s′ nach §. 41.

Die Spuren der Berührungsebenen ergeben ſich wie vorhin.

Fig. 120. Aufl. III. Eine Ebene, welche durch die nach den geſuchten Berührungspuncten laufenden Halbmeſſer gelegt wird, ſteht ſenkrecht auf beiden Berührungsebenen (§. 2, XI), mithin auch auf der gegebenen Geraden (§. 2, XII); man erhält alſo ihre Spuren OX, OX′, wenn man aus O Senkrechte auf die Projectionen der GH′ fällt. Dieſe Ebene ſchneidet die Kugel nach einem größten Kreiſe, die GH′ in einem Puncte P, und die geſuchten Ebenen in zwei von P ausgehenden Tangenten des größten Kreiſes, deren Berührungspuncte zugleich jenen Ebenen entſprechen (§. 270, †). Die Projectionen des Punctes P findet man nach §. 45, ſeine Umklappung $P_{\prime\prime}$ mit der Ebene XOX′ nach §. 57; die Umklappung des in derſelben Ebene liegenden größten Kreiſes fällt in den gegebenen Kugelumriß; man findet daher die umgeklappten Lagen $R_{\prime\prime}$, $S_{\prime\prime}$ der verlangten Berührungspuncte mittels der Tangenten $P_{\prime\prime}R_{\prime\prime}$, $P_{\prime\prime}S_{\prime\prime}$, und hat nun noch

Digitized by Google

ihre wahren Lagen R, S zu projiciren, was auf folgendem Wege geſchehen kann. Der Schnitt X der P,,S,, und OX iſt die H-Spur der Tangente PS, alſo pX ihre H-Projection und s (wo pX von der auf OX ſenkrechten S,,v getroffen wird) die H-Projection von S; die V-Projection s′ ergiebt ſich in x′p′ nach §. 41. Eben ſo wird man die Projectionen des zweiten Berührungspuncts R finden, wenn die H-Spur der Tangente PR eine günſtigere Lage hat als in Fig. 120, wo P,,R,, die XO erſt in großer Entfernung ſchneidet. Hier umgeht man dieſe Spur durch Benützung der Sehne RS. Die H-Spur der (verlängerten) RS iſt Z; ihre H-Projection Zs.. wird von R,,r (⊥ OX) in der H-Projection r des Punctes R geſchnitten, deſſen V-Projection r′ in z′s′.. liegen muß.

Da dieſe Auflöſung unabhängig iſt von den Spuren G, H′ der gegebenen Geraden, ſo iſt ſie namentlich dann anzuwenden, wenn dieſe Spuren in zu große Entfernung fallen. Die Spuren der geſuchten Ebenen kann man, wenn einmal die Berührungspuncte bekannt ſind, ebenfalls ohne Hülfe der Puncte G und H′ finden.

Zuſ. I. Eine durch GH′ und O gelegte Ebene halbirt den Winkel beider Berührungsebenen; denn die drei genannten Ebenen werden von der auf ihnen ſenkrechten Ebene XOX′ nach den drei Geraden geſchnitten, welche in OP,,, R,,P,,, S,,P,, umgeklappt ſind und von denen die erſte den Winkel der beiden andern halbirt. Fig. 120.

Zugleich ſieht man, daß jene Ebene GOH′ die zwiſchen den Berührungspuncten gezogene Sehne RS ſenkrecht halbiren muß.

Zuſ. II. Da die Berührungscurven der umſchriebenen Kegel ebene Curven (Kreiſe) ſind, ſo läßt der in §. 314 ausgeſprochene allgemeine Lehrſatz in Beziehung auf die Kugel folgende Umkehrung zu:

Läßt man eine Ebene um irgend eine Kugelſehne ſich drehen und umſchreibt der Kugel nach den Kreiſen, in welchen ſie von den verſchiedenen Lagen jener Ebene geſchnitten wird, berüh-

Digitized by Google

rende Kegel, ſo bleiben die Spitzen aller dieſer Kegel in einer beſtimmten Geraden, welche ganz außerhalb der Kugel liegt. *)

Zuſ. III. Aus dieſem Satze kann ſogleich noch ein Lehrſatz für die ebene Geometrie abgeleitet werden. Wenn man nämlich durch den Mittelpunct der Kugel und die Gerade GH′ (auf welcher die Spitzen aller Berührungskegel liegen, deren Baſen durch die Sehne RS gehen) eine Ebene legt, ſo ſchneidet dieſe die Kugel in einem (größten) Kreiſe K, die Kugelſehne RS in einem Puncte α, jede Lage der um RS gedrehten Ebene in einer durch α gehenden Geraden L, und den umſchriebenen Kegel in zwei Tangenten des Kreiſes K, deren Berührungspuncte auf L liegen. Hieraus folgt alſo: Dreht ſich die Sehne eines Kreiſes um einen innerhalb des Kreiſes gelegenen Punct, ſo bewegt ſich der Schnittpunct zweier Tangenten, welche durch die Endpuncte der Sehne an den Kreis gelegt ſind, in einer beſtimmten außerhalb desſelben gelegenen Geraden. **)

§. 317.

Übungsaufgabe.

Durch eine gegebene Gerade ſoll an eine gegebene Drehungsfläche eine Berührungsebene mittels §§. 302 und 311 gelegt werden (vgl. §. 313, 2).

§. 318.

Welche von den in §. 313, 1—4 aufgezählten Auflöſungsmethoden die paſſendſte für irgend eine hieher gehörige Aufgabe iſt, oder welche Puncte man bei (1) und (3) am ſchicklichſten für die Spitzen der umſchriebenen Kegel nimmt,

*) Ein ähnlicher Satz gilt für alle Flächen zweiter Ordnung.

**) Der Satz bleibt noch richtig, wenn man ſtatt des Kreiſes eine beliebige Linie zweiter Ordnung nimmt. (Daß man den Kreis mit einer Ellipſe vertauſchen kann, folgt ſchon aus §§. 200 und 195.)

Digitized by Google

hängt immer von der Natur der gegebenen Fläche ab. Öfters kann man ſich die Auflöſung bedeutend erleichtern, wenn man von dieſer Fläche außer ihrem Entſtehungsgeſetz auch noch ihre weitern Eigenſchaften näher kennt, und namentlich iſt dieß der Fall bei den Flächen zweiter Ordnung, wo die Berückſichtigung der in §§. 237, 297, 305 namhaft gemachten Eigenthümlichkeiten weſentliche Vortheile gewährt.

Die Aufgabe:

an eine Fläche zweiter Ordnung eine Berührungsebene durch eine gegebene Gerade zu legen,

läßt ſich mittels §. 312 löſen (§. 313. 1), oder auch mittels §§. 303 und 312 (§. 313. 2). Wer aber durch anderweitige mathematiſche Kenntniſſe im Beſitz der Beweiſe fur die in §§. 237. 297, 305 angeführten Sätze iſt, wird ſich die Conſtructionen in folgender Art vereinfachen.

Man lege die Grundebenen parallel zu zwei Hauptebenen der Fläche (welche beiſpielsweiſe ein Ellipſoid ſein mag) und wähle für die Spitzen zweier umſchriebener Hülfskegel diejenigen Puncte G, H, in denen dieſe Hauptebenen von der gegebenen Geraden GH geſchnitten werden. Der aus G beſchriebene Kegel hat als verticalen Umriß die Tangenten g'a', g'b' der Ellipſe v'a'w' und berührt die Fläche nach einer Ellipſe ε, deren V-Projection die gerade Linie a'b' ſein muß; denn da die Kegelſpitze ſich in der verticalen Hauptebene des Ellipſoids befindet, ſo müſſen je zwei (auf verſchiedenen Seiten der Hauptebene gelegene) Puncte der Berührungsellipſe eine gemeinſchaftliche Projection auf dieſer Hauptebene und alſo auch auf der VE haben. Zugleich ſieht man, daß (a'b', ab) eine Axe der Ellipſe ε ſein muß; ihr Mittelpunct liegt in (m', m), wo dieſe Axe von dem Flächendurchmeſſer GO getroffen wird. Die zweite Axe der Ellipſe ε iſt ſenkrecht zur VE und projicirt ſich alſo auf die HE in wahrer Länge nach der Richtung mo ($\perp$ GG). Um aber dieſe Länge zu finden, benützt man den Umſtand, daß das Ellipſoid durch parallele Ebenen in ähnlichen Curven geſchnitten wird. Die (zu GO geordnete) Diametralebene, welche parallel zur Ebene der Ellipſe ε iſt, ſchneidet die Fläche nach einer Ellipſe, deren V-Projection die Gerade c'o'd' ($\parallel$ a'b') Fig. 121.

Digitized by Google

und deren Halbaxen die Linien (o′d′, od), (o′, ou) ſind. Bezeichnet nun x die zweite Axe der Ellipſe e, ſo iſt

$$x : ou = m'b' : o'd' = mb : od;$$

zieht man daher bo ∥ ud, ſo iſt mo = x, und man kann nun die H-Projection aeb.. der Ellipſe e zeichnen, nämlich eine Ellipſe mit den Halbaxen mb und mo.

Der zweite umſchriebene Kegel, deſſen Spitze H in der horizontalen Hauptebene liegt, berührt das Ellipſoid in einer Ellipſe, deren H-Projection die Gerade qr iſt. Die Puncte t, s, in denen qr die Ellipſe aeb ſchneidet, ſind die H-Projectionen der Puncte, in denen das Ellipſoid von zwei durch GH gehenden Ebenen berührt wird; die zugehörigen V-Projectionen t′, s′ liegen auf a′b′. Die Spuren der Berührungsebenen ſind nun leicht anzugeben.

Die Berührungspuncte (t, t′), (s, s′) hätte man auch ohne Hülfe eines zweiten Kegels finden können; denn in dieſen Puncten muß die Ellipſe e von zwei Tangenten berührt werden, welche man an ſie aus dem Puncte (z′, z) zieht, wo ihre Ebene die Gerade GH ſchneidet (§. 270, †). Die H-Projectionen zt, zs dieſer Tangenten ſamt den Puncten t, s laſſen ſich finden, wenn man auch die Peripherie der Ellipſe aeb nicht gezeichnet, ſondern nur ihre Axen (und mittels dieſer die Brennpuncte) beſtimmt hat (Anm. auf S. 153). In Fig. 121 ſind die Linien ZT, ZS zugleich zur Auffindung der Spuren für die Berührungsebenen benützt.

E.) Berührungsebenen, parallel mit einer gegebenen Ebene.

§. 319.

Da man einer Ebene, welche mit einer gegebenen Ebene E parallel iſt, nur noch eine willkührliche Bedingung ſtellen kann, ſo iſt ihre Lage völlig beſtimmt, wenn ſie eine gegebene Fläche F zu berühren hat.

Eine ſolche Ebene berührt zugleich alle möglichen Cylinder, welche der Fläche F parallel mit jener Ebene E (d. i. parallel mit verſchiedenen in E liegenden Geraden) umſchrieben ſind, und die dieſen Cylindern entſprechenden Berührungscurven müſſen daher alle durch den Berührungspunct

Digitized by Google

der erſtern Ebene gehen. (Kann die Berührungsebene mehrere Lagen haben, ſo gilt Obiges von jeder einzelnen Lage).

Bewegt ſich alſo ein Cylinder ſo, daß er ſtets einer gegebenen Fläche umſchrieben bleibt und ſeine Mantellinien einer gegebenen Ebene parallel ſind, ſo geht die Berührungscurve ſtets durch eine beſtimmte Anzahl feſter Puncte auf der Fläche.

§. 320.

Aus dem Vorigen iſt abzunehmen, wie man eine Berührungsebene von der erwähnten Beſchaffenheit finden könne. Nämlich:

1.) Zieht man in der Ebene E zwei beliebige (aber nicht parallele) Gerade und umſchreibt der Fläche F zwei Cylinder parallel mit dieſen Geraden, ſo iſt der Schnittpunct der beiden Berührungscurven der Berührungspunct der verlangten Berührungsebene. Oder:

2.) Man umſchreibe der Fläche F einen Cylinder parallel mit irgend einer in E gezogenen Geraden, conſtruire eine Spur desſelben und ziehe an ſie eine Tangente parallel mit der gleichnamigen Spur der Ebene E; dieſe Tangente iſt die eine Spur der verlangten Ebene; die zweite Spur iſt parallel mit der zweiten Spur der E. (Der Berührungspunct liegt auf der Berührungscurve des umſchriebenen Cylinders und auf der Mantellinie, nach welcher letzterer von der geſuchten Ebene berührt wird; er iſt alſo der Durchſchnitt jener Curve und dieſer Geraden.)

§. 321.

Iſt die gegebene Fläche F eine entwickelbare, ſo iſt es im Allgemeinen unmöglich, an ſie eine Berührungsebene parallel mit einer gegebenen Ebene E zu legen; denn eine ſolche Ebene iſt ſchon völlig beſtimmt, wenn ſie mit einer in E gezogenen Geraden parallel liegt (§. 293), und man kann demnach nicht fordern, daß ſie überdieß noch mit

Digitized by Google

einer zweiten Geraden in E parallel ſei, was doch der Fall ſein müßte, wenn ſie der Ebene E ſelbſt parallel ſein ſollte.

§. 322.

Die in §. 320 angegebenen allgemeinen Auflöſungsmethoden können in manchen Fällen durch einfachere erſetzt werden, welche aus der beſondern Beſchaffenheit der gegebenen Fläche herzuleiten ſind. Frühere Unterſuchungen krummer Flächen liefern hiezu die beiden folgenden Beiſpiele.

I.) Die gegebene Fläche F ſei eine Drehungsfläche mit verticaler Axe.

Aus §. 273 (α) iſt bekannt, daß die Berührungsebene einer Drehungsfläche ſenkrecht auf der Meridianebene ſteht, welche den Berührungspunct enthält. Führt man daher durch die Drehungsaxe eine Ebene M ſenkrecht zur gegebenen Ebene E, projicirt den Schnitt L der M und E, zeichnet die V-Projection des in der Ebene M liegenden Meridians (§. 229) und zieht an dieſen Meridian eine Tangente T parallel mit L, ſo geht die geſuchte Ebene durch T und berührt die Drehungsfläche in demſelben Puncte, in welchem T den Meridian berührt. *)

II.) Die Fläche F ſei ein Hyperboloid mit einem Mantel, und auf die in §. 253 bezeichnete Art gegeben **).

*) Es wurde der Allgemeinheit wegen vorausgeſetzt, die gegebene Erzeugende der Fläche ſei von der Meridiancurve verſchieden. Iſt aber als Erzeugende ein Meridian gegeben, ſo braucht man die V-Projection des in M liegenden Meridians nicht beſonders zu zeichnen; vielmehr wird man die Ebene M mit der in ihr liegenden Geraden L durch Drehung in die Ebene des gegebenen Meridians fallen laſſen, hier die Tangente parallel mit der neuen Lage der L ziehen und hierauf die M in ihre erſte Lage zurückbringen.

**) nämlich — bei verticaler Stellung der imaginären Axe — durch die Projectionen der Äquatorialellipſe KIL (Fig. 103) und eine Axe AB (∥ GS) der H-Spur.

Digitized by Google

Die geſuchte Berührungsebene enthält zwei Mantellinien des Hyperboloids, mit denen ſich auf ſeinem aſymptotiſchen Kegel zwei Parallelen π_1, π_2 ziehen laſſen. Die durch π_1 und π_2 beſtimmte Ebene iſt demnach parallel mit der Berührungsebene (§. 2, XX) und folglich auch mit E. Hiernach hat man zuerſt die H-Spur des aſymptotiſchen Kegels zu conſtruiren (§. 253, III) und durch den Mittelpunct der Fläche eine Ebene parallel zu E zu legen (§. 48); dieſe Ebene ſchneidet den aſymptotiſchen Kegel nach den Geraden π_1, π_2; ihre H-Spur begegnet der Kegelſpur in zwei Puncten, welche die H-Spuren für die Linien π_1, π_2 ſind und mittels deren die Projectionen dieſer Linien gefunden werden. Auf dem Mantel des Hyperboloids laſſen ſich nun zwei Parallelen mit π_1 und zwei Parallelen mit π_2 ziehen; faßt man von dieſen vier Mantellinien je die beiden zuſammen, welche ſich ſchneiden, ſo beſtimmt jedes ſolche Paar eine mit E parallele Berührungsebene und ſein Durchſchnitt den Berührungspunct. Dieſe Mantellinien können aber (mit Rückſicht auf §. 22) leicht projicirt werden, da ihre H-Projectionen die H-Projection der Äquatorialellipſe berühren, und zwar in Puncten, welche zugleich die H-Projectionen für die Schnitte der wahren Mantellinien mit der Äquatorialellipſe ſind.

Wenn die H-Spur der Hülfsebene, welche durch den Mittelpunct der Fläche parallel zu E gelegt wurde, die Spur des aſymptotiſchen Kegels berührt, ſo ſtellt dieſe Ebene ſogleich die verlangte vor; letztere iſt aber dann keine Berührungsebene im engern Sinne mehr, ſondern eine aſymptotiſche Ebene (§. 282).

Wenn die Spur jener Hülfsebene die Kegelſpur gar nicht trifft, ſo giebt es keine mit E parallele Berührungsebene des Hyperboloids.

§. 323.

Kann man eine Ebene B finden, welche eine gegebene Fläche F berührt und einer gegebenen Ebene E parallel iſt,

Digitized by Google

ſo iſt man auch im Stande, die folgende Aufgabe zu löſen: an eine gegebene krumme Fläche F eine Normale parallel mit einer gegebenen Geraden G zu ziehen.

Nimmt man nämlich eine zu G ſenkrechte Ebene für die Ebene E, ſo iſt der Berührungspunct der gefundenen Ebene B der Fußpunct der verlangten Normalen.

F.) Gemeinſchaftliche Berührungsebenen mehrerer Flächen.

§. 324.

Wenn die Mantellinien zweier Cylinderflächen die Richtung gemeinſchaftlich haben (mit andern Worten: wenn die Erzeugende des einen Cylinders mit der Erzeugenden des andern parallel iſt), ſo kann man an beide Flächen eine gemeinſchaftliche Berührungsebene legen. Denn zieht man z. B. an ihre H-Spuren eine gemeinſchaftliche Tangente T und durch jeden von den beiden Berührungspuncten eine Mantellinie auf dem entſprechenden Cylinder, ſo liegen offenbar dieſe beiden Mantellinien mit T in einerlei Ebene und dieſe Ebene berührt ſowohl den einen als den andern Cylinder.

Hiernach kann die Aufgabe: für irgend zwei gegebene Flächen F_1, F_2 eine gemeinſchaftliche Berührungsebene zu finden, dadurch gelöſt werden, daß man den Flächen Cylinder parallel mit einer und derſelben Geraden G umſchreibt und an beide Cylinder eine gemeinſchaftliche Berührungsebene legt; dieſe berührt zugleich die gegebenen Flächen F_1 und F_2.

Da der Geraden G unendlich viele verſchiedene Lagen gegeben werden können, ſo iſt die genannte Aufgabe eine unbeſtimmte. Aber die geſuchte Berührungsebene kann außerdem nur noch eine willkührliche Bedingung erfüllen; denn ſie iſt z. B. beſtimmt, ſobald die Richtung der G beſtimmt iſt. Wenn alſo die Ebene alle ihre möglichen Lagen in ſtetigem Übergange durchlaufen ſoll, ſo bewegt ſie ſich nach einem be-

Digitized by Google

ſtimmten Geſetz, und ihre ſucceſſiven Durchſchnitte bilden eine **entwickelbare Fläche U** (§§. 241, 246).

§. 325.

α.) Die obige Aufgabe wird zu einer **beſtimmten**, wenn eine von den gegebenen Flächen F_1, F_2 ſelbſt entwickelbar iſt; denn es wurde ſchon in §. 293 bemerkt, daß zur völligen Beſtimmung einer Ebene, welche eine entwickelbare Fläche berühren ſoll, eine einzige weitere Angabe hinreicht; berührt alſo eine ſolche Ebene zugleich noch eine zweite Fläche, ſo kann ſie nicht aus ihrer Lage treten, ohne ihren Character als **gemeinſchaftliche** Berührungsebene aufzugeben.

In dieſem Falle iſt demnach die zu Ende des vorigen § erwähnte Fläche U nicht vorhanden. — (Ein Beiſpiel in §. 328.)

β.) Sind die gegebenen Flächen F_1, F_2 **beide** entwickelbar, ſo giebt es für ſie im Allgemeinen keine gemeinſchaftliche Berührungsebene. Denn indem eine Ebene an F_1 und eine andere an F_2 berührend fortgleitet, befolgt jede unabhängig von der andern ihr beſtimmtes Bewegungsgeſetz, und man kann daher nicht fordern, daß beide Ebenen irgend einmal ganz zuſammenfallen. Nur ausnahmsweiſe und in beſondern Fällen könnte dieß geſchehen, wie z. B. bei den zu Anfang des §. 324 betrachteten parallelen Cylindern, oder bei zwei congruenten Drehungskegeln mit parallelen Axen, oder auch bei dem Beiſpiele des §. 308; in allen dieſen Fällen aber iſt die Möglichkeit einer gemeinſchaftlichen Berührungsebene in der **gegenſeitigen Abhängigkeit** der gegebenen Flächen begründet.

§. 326.

Eine Ebene, welche zwei **nicht entwickelbare** Flächen F_1, F_2 berühren ſoll, kann noch einer dritten Forderung genügen, durch deren Hinzutreten die Aufgabe eine **beſtimmte** wird. Von welcher Art dieſe Forderung ſein darf, läßt ſich aus frühern Betrachtungen folgern. Die fragliche

Ebene iſt nämlich eine Berührungsebene der um F_1 und F_2 beſchriebenen entwickelbaren Fläche U (§. 324), und von einer ſolchen kann man z. B. nicht verlangen, daß ſie durch eine gegebene Gerade gehe (§. 315) oder einer gegebenen Ebene parallel ſei (§. 321); wohl aber, daß ſie durch einen außerhalb gegebenen Punct gehe, oder mit einer gegebenen Geraden parallel ſei, oder auch eine neue Fläche F_3 berühre (§. 325, α), welche nicht ſelbſt entwickelbar ſein darf (§. 325, β). — (Beiſpiele hiezu in §§. 329—331.)

§. 327.

Die letzte Bemerkung des vorigen § enthält folgende Wahrheiten:

1.) Drei gegebene Flächen geſtatten eine gemeinſchaftliche Berührungsebene nur dann, wenn keine entwickelbare darunter iſt.

2.) Eine Ebene, welche drei gegebene Flächen berühren ſoll, iſt vollkommen beſtimmt.

3.) Deshalb iſt es im Allgemeinen unmöglich, an vier oder noch mehr Flächen eine gemeinſchaftliche Berührungsebene zu legen.

§. 328.

Aufg. An eine gegebene Kugel und einen gegebenen Drehungskegel eine gemeinſchaftliche Berührungsebene zu legen.

Fig. 122. Aufl. Man lege die HE durch den Mittelpunct O der Kugel ſenkrecht zur Axe des Kegels und die VE durch die Kegelaxe K′k; dann hat man als verticalen Umriß für die Kugel den größten Kreis P′R′H und für den Kegel die Geraden K′A, K′B. Eine mit K′A parallele Tangente L′C (oder L′D) des größten Kreiſes P′R′H, um die Verticallinie L′OL′ gedreht, erzeugt eine Kegelfläche, welche der gegebenen congruent iſt. Zieht man an die H-Spuren AM, B, CN, D beider Kegel eine gemeinſchaftliche Tangente und denkt ſich durch ſie eine Ebene gelegt, deren H-Neigung $= \angle$ L′CO $= \angle$ K′Ak iſt, ſo muß dieſe Ebene offenbar ſowohl durch L′ (oder L′)

als durch K′ gehen; ſie berührt alſo nicht nur den gegebenen Kegel K′, ſondern auch den Hülfskegel L′ (oder 𝔏′) und folglich zugleich die gegebene Kugel, welcher der letztere Kegel umſchrieben iſt. Ihre V-Spur iſt die Verbindungslinie beider Kegelſpitzen.

Man ſieht, daß die auf ſolche Art gefundene Ebene vier Lagen M_1QK', M_2QK', $\mathfrak{M}_1\mathfrak{Q}K'$, $\mathfrak{M}_2\mathfrak{Q}K'$ annehmen kann, von denen je zwei eine gemeinſchaftliche V-Spur haben. *)

Die Lage M_1QK' berührt den gegebenen Kegel K′ in der Mantellinie $(M_1k, m'K')$ und den Hülfskegel L′ in der Mantellinie $(N_1O, n'L')$; auf letzterer liegt der Punct, in welchem die Kugel von der Ebene M_1QK' berührt wird; und da dieſer zugleich ein Punct des Kreiſes P′TR′ iſt, in welchem die Berührung der Kugel und des Kegels L′ vor ſich geht, ſo findet man ſeine V-Projection t′ als Schnitt der Geraden P′R′ und L′n′, ſeine H-Projection t nach §. 41 **). — Ähnlich kann man auch für die übrigen Lagen der Berührungsebene die Berührungspuncte auf der Kugel und die Berührungslinien auf dem gegebenen Kegel finden.

§. 329.

Aufg. Eine Ebene zu finden, welche durch einen gegebenen Punct geht und zwei gegebene Kugeln berührt.

Aufl. Die HE ſei durch den gegebenen Punct S_2 und die Mittelpuncte M_1, M_2 der beiden Kugeln gelegt. Fig. 123.

Zwei an die H-Spuren der Kugeln gezogene gemeinſchaftliche Tangenten P_3S_3, $\mathfrak{P}_3\mathfrak{S}_3$, von denen die eine die Centrallinie M_1M_2.. in S_3, die andere in $\mathfrak{S}_3$ ſchneidet, erzeugen durch Drehung um M_1M_2 zwei Kegel, welche die gegebenen Kugeln in den Kreiſen P_3AQ_3, XZY, $\mathfrak{P}_3\mathfrak{A}\mathfrak{Q}_3$, $\mathfrak{X}\mathfrak{Z}\mathfrak{Y}$ berühren ***). Eine durch S_2 gehende Berührungs-

*) Wann reducirt ſich die Anzahl dieſer Lagen auf 3? wann auf 2? wann auf 1? wann auf 0?

**) Probe: Ot′ ⊥ QK′.

***) Jeder ſolche Kegel ſtellt für die gegenwärtige Aufgabe die in §. 324 beſprochene entwickelbare Fläche U vor.

Digitized by Google

ebene eines dieſer Kegel genügt der Aufgabe; und da es für jeden einzelnen Kegel zwei ſolche Berührungsebenen giebt, ſo ſind für die geſuchte Ebene im Allgemeinen vier Lagen möglich *). S_2S_3 iſt die H-Spur zweier von dieſen Lagen; $S_2\mathfrak{S}_3$ die H-Spur der beiden andern.

Um die Puncte zu finden, in denen die beiden erſten Ebenen die Kugel M_1 berühren, denke man ſich an den Kreis P_3AQ_3 Tangenten aus dem Puncte gezogen, wo die S_3S_2 die Kreisebene trifft. In der Umklappung der Kreisebene können dieſe Tangenten gezeichnet werden, und man hat dann nur noch ihre Berührungspuncte auf ihre wahre Lage zurückzuführen, wo ſie zugleich die Berührungspuncte der durch S_3S_2 gehenden Ebenen vorſtellen. Dieſe Berührungspuncte ſind aber auch dadurch zu erhalten, daß man aus S_2 (oder aus irgend einem andern Puncte der S_3S_2) einen neuen Berührungskegel um die Kugel M_1 beſchreibt. Die H-Spur dieſes Kegels bilden die Tangenten S_2P_2, S_2Q_2; der Berührungskreis iſt in P_2Q_2 projicirt, und der Punct a, wo P_2Q_2 und P_3Q_3 ſich ſchneiden, giebt die gemeinſchaftliche H-Projection der Berührungspuncte, deren gleiche (aber entgegengeſetzt gerichtete) H-Diſtanzen aus der Umklappung des Kreiſes P_3AQ_3 (oder P_2AQ_2) zu erſehen ſind. — Die Mantellinien des Kegels S_3, welche in ſeine Berührungsebenen fallen, projiciren ſich beide in aS_3; der Schnittpunct z der aS_3 und XY iſt daher die gemeinſchaftliche H-Projection der zwei Puncte, in denen die zweite Kugel M_2 berührt wird.

Auf dieſelbe Weiſe ergeben ſich die Berührungspuncte für die beiden andern Ebenen (welche durch $S_2\mathfrak{S}_3$ gehen und den Kegel $\mathfrak{S}_3$ berühren).

Man ſieht, daß die vorliegende Aufgabe ſich ohne Hülfe einer VE löſen läßt, da man die H-Spur jeder Berührungsebene, ſo wie die H-Projectionen und H-Diſtanzen ihrer Berührungspuncte blos mittels der HE fand. Will man aber eine beliebige VE hinzunehmen, ſo kann man auf dieſer die

*) Wann drei? zwei? eine? keine?

Digitized by Google

Projectionen der Berührungspuncte (§. 40) und die Spuren der Berührungsebenen (§. 24) leicht angeben.

§. 330.

Aufg. An zwei gegebene Kugeln eine gemeinſchaftliche Berührungsebene parallel mit einer gegebenen Geraden zu legen.

Aufl. Man lege die HE durch die beiden Kugelmittelpuncte und zugleich parallel zur gegebenen Geraden G.

Umſchreibt man wieder den beiden Kugeln zwei berührende Kegel und zieht durch die Spitzen derſelben Parallelen mit G, ſo gehen durch jede ſolche Parallele zwei Berührungsebenen des entſprechenden Kegels (§. 295) oder der beiden Kugeln, woraus folgt, daß die Aufgabe durch vier Ebenen gelöſt werden kann. Jene Parallelen liegen aber ganz in der HE und ſtellen mithin ſogleich die H-Spuren der Berührungsebenen vor. Die Berührungspuncte findet man wie in der vorigen Aufgabe.

§. 331.

Aufg. An drei gegebene Kugeln eine gemeinſchaftliche Berührungsebene zu legen.

Aufl. Die HE gehe durch die Mittelpuncte M_1, M_2, M_3 der drei Kugeln. Fig. 123.

Man denke ſich um die Kugeln M_1 und M_2 wie in §. 329 einen berührenden Kegel (S_3) beſchrieben und einen zweiten (S_2) um die Kugeln M_1 und M_3. Die H-Spuren dieſer Kegel ſind die Tangenten P_3XS_3, Q_3YS_3 der größten Kreiſe M_1, M_2, und die Tangenten P_2S_2, Q_2S_2 der Kreiſe M_1, M_3; die Kegel ſelbſt berühren die Kugel M_1 in Kreiſen, deren H-Projectionen die Geraden P_3Q_3, P_2Q_2 ſind. An beide Kegel muß eine gemeinſchaftliche Berührungsebene möglich ſein, weil ſie einer und derſelben Kugel M_1 umſchrieben ſind, und dieſe Ebene löſt die Aufgabe. Ihre H-Spur iſt die Verbindungslinie S_3S_2 der Kegelſpitzen; ſie berührt die Kugel M_1 in dem Schnitt-

puncte A der in P_3Q_3 und P_2Q_2 projicirten Kreiſe. Da ſich nun dieſe Kreiſe in zwei Puncten ſchneiden, denen die gemeinſchaftliche H-Projection a zukommt, ſo gehen durch S_3S_2 zwei Lagen der geſuchten Ebene. Die H-Diſtanz der Berührungspuncte auf der Kugel M_1 findet man durch Umklappung des Kreiſes P_3Q_3 (oder P_2Q_2).

Die beiden eben betrachteten um je zwei Kugeln beſchriebenen Kegel hatten ihre Spitzen S_3, S_2 auf den Verlängerungen der betreffenden Centrallinien M_1M_2, M_1M_3; es giebt aber, wie leicht zu ſehen, noch zwei andere Kegel, welche um die nämlichen Kugelpaare ſo beſchrieben ſind, daß ihre Spitzen $\mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}_2$ zwiſchen den betreffenden Mittelpuncten liegen. Die vier Kegel $S_3, S_2, \mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}_2$ laſſen ſich viermal paaren, und da für jedes Paar dasſelbe gelten muß, was oben in Bezug auf S_3 und S_2 abgehandelt wurde, ſo kann die geſuchte Ebene $4.2 = 8$ Lagen erhalten, von denen je zwei die H-Spur und die H-Projection der Berührungspuncte gemein haben, nach folgender Überſicht:

2 Ebenen	gehen	durch	S_2S_3	und	berühren	die	Kugel	M_1	in 2	Puncten	A.
„	„	„	$S_2\mathfrak{S}_3$	„	„	„	„	„	„	„	B.
„	„	„	$\mathfrak{S}_2S_3$	„	„	„	„	„	„	„	C.
„	„	„	$\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3$	„	„	„	„	„	„	„	D.

Die Berührungspuncte der Ebenen mit den zwei übrigen Kugeln kann man auf ähnliche Weiſe wie in §. 329 finden. *)

Zuſ. So wie man die Kugeln M_1, M_2, und dann die Kugeln M_1, M_3 durch umſchriebene Kegel verbunden hat, ſo kann man auch um die Kugeln M_2, M_3 gemeinſchaftliche Berührungskegel $S_1, \mathfrak{S}_1$ beſchreiben, deren Spitzen in der Centrallinie M_2M_3 liegen, und von den 8 gemeinſchaftlichen Berührungsebenen aller drei Kugeln muß offenbar jede einen dieſer neuen Kegel $S_1, \mathfrak{S}_1$ berühren. Man ſieht, daß überhaupt jede Berührungsebene der drei Kugeln eine gemein-

*) Für welche Fälle wird die Zahl der Auflöſungen geringer?

Digitized by Google

ſchaftliche Berührungsebene dreier Kegel iſt, deren jeder einem andern Kugelpaare umſchrieben wurde; daher liegen die drei Kegelſpitzen immer in gerader Linie, nämlich in der H-Spur der Berührungsebene.

Behält man blos die in der Zeichnungsebene ausgeführten Conſtructionen im Auge, ſo iſt mit Obigem folgender Lehrſatz der ebenen Geometrie ausgeſprochen: Legt man an je zwei von drei gegebenen Kreiſen ſo oft als möglich gemeinſchaftliche Tangenten, ſo liegen die ſechs Puncte, in denen ſich dieſe Tangenten paarweiſe auf den betreffenden Centrallinien ſchneiden, zu je dreien auf vier Geraden.

Viertes Kapitel.

Schnitte krummer Flächen durch Ebenen und gerade Linien.

§. 332.

Die Puncte, in denen eine Gerade eine krumme Fläche ſchneidet, findet man, wenn man durch die Gerade eine Ebene beliebig legt, den Schnitt dieſer Ebene mit der krummen Fläche ſucht, und dann zuſieht, wo die Gerade dem Schnitte begegnet. Die Beſtimmung dieſer Puncte kommt alſo immer auf die Aufgabe zurück: den Schnitt einer krummen Fläche und einer Ebene zu projiciren.

§. 333.

Eine ſtetige krumme Fläche wird von einer Ebene in einer ſtetigen Curve geſchnitten, welche ſich aber unter gewiſſen Verhältniſſen in eine oder mehrere Gerade auflöſen kann.

In manchen Fällen iſt aus der Lage der ſchneidenden Ebene gegen die krumme Fläche die Natur des Schnittes zum Voraus bekannt und ſeine Projectionen laſſen ſich un-

Digitized by Google

mittelbar oder doch mit nur geringer Vorbereitung zeichnen. Solche Fälle dienen dann zugleich zur Auflöſung anderer, bei denen die ſchneidende Ebene eine weniger günſtige Lage hat. Wird nämlich die Curve X geſucht, in welcher eine krumme Fläche von einer beliebig gegebenen Ebene E geſchnitten wird, ſo ſieht man ſich nach einem Syſtem von Ebenen um, deren Schnitte mit der krummen Fläche unmittelbar projicirt werden können, und zeichnet außer dieſen Flächenſchnitten auch die geraden Durchſchnitte der Hülfsebenen mit der Ebene E. Schneidet nun eine ſolche Hülfsebene die Fläche F in der Curve y und die Ebene E in der Geraden g, ſo gehören die Puncte, in welchen y und g ſich begegnen, der verlangten Curve X an, und man erhält von dieſer auf die angegebene Weiſe beliebig viele Puncte, wenn man die Lage der Hülfsebene ändert.

§. 334.

Sind einmal die beiden Projectionen der Durchſchnittscurve gefunden, ſo kann man dieſe Curve ſelbſt in wahrer Geſtalt und Größe dadurch erhalten, daß man die Schnittebene in eine Grundebene umklappt, die Lagen einer hinreichenden Anzahl von Curvenpuncten in der Umklappung ſucht (§. 57) und ſtetig verbindet.

§. 335.

Eine Tangente, welche durch irgend einen Punct p der Schnittcurve X an dieſe gelegt wird, fällt in die durch p gehende Berührungsebene der geſchnittenen krummen Fläche. Läßt ſich daher dieſe Berührungsebene einfach conſtruiren, ſo kann man jene Tangente als Durchſchnitt der Berührungsebene und der Schnittebene E finden, ohne daß man die Peripherie der Curve nöthig hat.

Schnitte der Drehungsflächen.

§. 336.

Eine Drehungsfläche wird von jeder zur Axe ſenkrechten Ebene in einem Parallelkreiſe geſchnitten. Ein

Digitized by Google

Syſtem ſolcher Ebenen wird alſo hier die in §. 333 genannten Hülfsebenen liefern, wenn die Drehungsfläche von irgend einer andern Ebene geſchnitten werden ſoll. Dabei nimmt man wieder die HE ſenkrecht zur Drehungsaxe an; die VE legt man am beſten ſenkrecht zur Schnittebene (wie in dem Beiſpiele des §. 338), weil dann ihre V-Spur ſogleich die V-Projection der Schnittcurve enthält und auch die verticale Umklappung der wahren Curve ſehr leicht auszuführen iſt (§. 57, †); in dem nachfolgenden Beiſpiele iſt aber, um die Allgemeinheit des Verfahrens zu zeigen, die VE in einer andern beliebig gewählten Stellung vorausgeſetzt.

§. 337.

Es ſei (vw, v'u'w') die Erzeugende, (o, o'o'') die Drehungsaxe der Fläche, PQP' die gegebene Schnittebene. Fig. 124. Eine horizontale Hülfsebene ſchneidet die Fläche nach dem Parallelkreiſe (m'n', man) und die Ebene PQP' nach der Geraden (S'b', sb) [§. 44, ††]; daher ſind (a, a') und (b, b') zwei Puncte der Curve, in welcher die gegebene Fläche von der Ebene PQP' geſchnitten wird. Andere Paare ſolcher Puncte erhält man durch Verrückung der horizontalen Ebene S'm'n', ſo daß ſich die Schnittcurve ſelbſt vollſtändig conſtruiren läßt. *)

In Fig. 124 iſt die gegebene Erzeugende zugleich ein Meridian der Fläche, und zwar der Hauptmeridian. Wäre eine andere Erzeugende gegeben, ſo könnte man die Parallelkreiſe, nach denen die horizontalen Ebenen die Fläche ſchneiden, eben ſo leicht finden (vgl. §. 226) und das übrige Verfahren bliebe ganz daſſelbe wie oben. Aber der Umſtand, daß der Hauptmeridian der Fläche gegeben iſt, macht es hier möglich, durch einfache Conſtructionen einige beſonders wichtige Puncte der Schnittcurve zu erhalten.

*) Die gegebene Fläche iſt ein Drehungs-Paraboloid. So oft ein ſolches nach einer geſchloſſenen Curve geſchnitten wird, iſt (bei verticaler Drehungsaxe) die H-Projection des Schnittes immer ein Kreis (S. Anhang, III).

Digitized by Google

Welche Lage auch die horizontale Ebene S′m′n′ haben mag, ſo halbirt immer eine zu PQP′ ſenkrechte Meridianebene PRP′ die Sehne AB der Schnittcurve ſenkrecht; deshalb theilt dieſe Meridianebene die Schnittcurve ſelbſt in zwei ſymmetriſche Hälften, und die Curve wird in den auf die Meridianebene fallenden Puncten C, D von den durch dieſelben gehenden Parallelkreiſen *berührt* (während jeder andere Parallelkreis die Curve in zwei Puncten ſchneidet). Um dieſe (äußerſten) Puncte C, D zu finden, projicire man den Schnitt (PR, p′P′) der Ebenen PRP′ und PQP′, welcher der Drehungsaxe im Puncte (o, o″) begegnet, drehe hierauf die Meridianebene in die zur VE parallele Stellung und ziehe die V-Projection p°o″ jenes Schnittes für die neue Stellung der Ebene; dann gehen die V-Projectionen der Parallelkreiſe, auf denen C und D liegen, durch die Puncte γ′, δ′ (wo p°o″ und v′u′w′ ſich ſchneiden), und die Puncte (c′, c), (d′, d) ſelbſt ſind dadurch beſtimmt.

Die V-Projection der Schnittcurve muß, wenn ſie von dem ſichtbaren Theil der Fläche auf den unſichtbaren übergeht, den verticalen Flächenumriß berühren (§. 299, I), und zwar in Puncten, welche die V-Projectionen für die Schnittpuncte der Ebene PQP′ und der Peripherie des Hauptmeridians ſind. Die Ebene des letztern ſchneidet die Ebene PQP′ nach der Geraden (Zo, z′o″); daher ſind (e′, e), (f′, f) jene Schnittpuncte und e′, f′ die erwähnten Berührungspuncte.

§. 338.

Beim *Wulſt* (§. 223) findet ſich die Eigenthümlichkeit, daß eine Ebene, welche ihn auf der *innern* Seite berührt *), zugleich ſeine Fläche in einer ſtetigen Curve ſchneidet, für welche der Berührungspunct ein *Doppelpunct* iſt. Fig. 125. Dieſe Curve iſt in Fig. 125 nach der im vorigen § angegebenen Methode projicirt und umgeklappt, wobei die Con-

*) d. h. ſo, daß der Berührungspunct auf dem *kleinern* von den beiden concentriſchen Pararallelkreiſen liegt, nach denen eine horizontale Ebene die Fläche ſchneidet.

ſtructionen noch einfacher ſind als vorhin, weil die VE ſenkrecht zur berührenden Schnittebene PQP′ angenommen wurde.

Schnitte der Regelflächen.

§. 339.

Die allgemeine Methode, den Schnitt einer Regelfläche und einer Ebene zu finden, beſteht darin, daß man eine hinreichende Anzahl von Mantellinien der Fläche projicirt, deren Schnittpuncte mit der Ebene aufſucht (§. 45) und ſtetig verbindet.

Ein Beiſpiel folgt in §. 340. Um ſich noch an andern einfachen Beiſpielen zu üben, kann man die in Fig. 102 und Fig. 110 dargeſtellten Flächen durch horizontale Ebenen ſchneiden, oder die Fläche der Fig. 107 durch eine zum Grundſchnitt ſenkrechte Ebene, oder auch irgend einen Kegel durch eine beliebige Ebene.

§. 340.

Aufg. Den Schnitt einer Cylinderfläche und einer Ebene POP′ zu projiciren.

Aufl. Der Cylinder habe (LMN.., l′n′) zur Leitenden; eine Mantellinie ſei (Vx, v′X′). Die h-projicirende Ebene dieſer Mantellinie enthält zugleich noch eine zweite Mantellinie (Wx, w′X″) und ſchneidet die Ebene POP′ nach der Geraden (Vx, Q′h′a′); dieſe Gerade führt auf die Puncte (a′, a), (b′, b), in denen jene beiden Mantellinien die Ebene POP′ durchdringen (vgl. §. 45) und welche auf der verlangten Schnittcurve liegen müſſen. Fig. 127.

Um noch mehr ſolche Puncte zu erhalten, ſucht man die Schnitte anderer Mantellinien mit der Ebene POP′. Die hiezu nöthigen Schnittlinien zwiſchen POP′ und den h-projicirenden Ebenen der Mantellinien kann man jetzt, nachdem eine ſolche Linie (Vx, h′a′) projicirt iſt, einfacher finden; denn ihre V-Projectionen ſind parallel mit h′a′ (§. 2, XVII; §. 22). Projicirt man alſo z. B. die Mantellinien (My, m′Y′), (Ny, n′Y″), fällt Kk′ ⊥ GS und zieht k′c′ ∥ h′a′, ſo wird

Digitized by Google

in (c′, c) und (d′, d) die Ebene POP′ von MY′ und NY″ geſchnitten.

Soll durch denjenigen Punct der Schnittcurve, welcher auf der Mantellinie (Ur, u′r′) liegt, eine Tangente an die Curve gezogen werden, ſo projicire man vorerſt den Schnitt R der (Ur, u′r′) und POP′, zeichne dann die H-Spur der durch UR gehenden Berührungsebene des Cylinders (nämlich eine Tangente UT der Cylinderſpur im Puncte U) und bemerke, daß T die H-Spur der geſuchten Tangente ſein muß, weil letztere der Schnitt der POP′ und jener Berührungsebene iſt (§. 335). Man erhält demnach Tr, t′r′ als Projectionen der Tangente.

Wäre die H-Spur UT der Berührungsebene parallel zu OP geworden, ſo müßte die fragliche Tangente ebenfalls parallel zu OP oder zur HE ſein (§. 2, V) und ihr Berührungspunct R wäre dann entweder der höchſte oder der tiefſte Punct der Schnittcurve. Dieſe Bemerkung lehrt die genannten Puncte finden. (In Fig. 127 wurden die Mantellinien VX′, WX″ ſo gewählt, daß A der höchſte und B der tiefſte Punct des Schnittes iſt.)

§. 341.

Wird eine entwickelbare Fläche geſchnitten, ſo kann man nach der Verwandelten der Schnittcurve fragen. Der Conſtruction dieſer Verwandelten muß immer die wirkliche Entwickelung der Fläche vorausgehen, und dieſe Entwickelung ſelbſt läßt ſich in den meiſten Fällen nur mit Hülfe anderer paſſend gewählter Schnitte genau ausführen.

Es ſoll hier zunächſt nur von der Entwickelung der Cylinderflächen und der Drehungskegelflächen gehandelt werden.

§. 342.

Iſt irgend eine Cylinderfläche ſo dargeſtellt, daß ihre Mantellinien ſenkrecht zur HE ſtehen und ihre Leitende ganz in der HE liegt, ſo iſt ihre Entwickelung deshalb leicht auszuführen, weil die Verwandelte ihrer H-Spur eine Gerade wird (§. 246). Eine ſolche Cylinderfläche werde durch eine

Digitized by Google

Ebene PQP' geſchnitten; man verlangt die Figur des Schnittes und ſeine Verwandelte.

Legt man die VE ſenkrecht zur Schnittebene, ſo fällt die V-Projection v'w' der Schnittcurve in die V-Spur QP' der Schnittebene und die H-Projection in die H-Spur vbw der Cylinderfläche. Die Geſtalt $V_1A_1B_1..$ des Schnittes ergiebt ſich hiernach leicht durch Umklappung. Fig. 126.

Durch die Mantellinie Bb des Cylinders ſei eine Berührungsebene gelegt (deren H-Spur alſo die durch b gehende Tangente bP der Curve vbw iſt); in dieſe Ebene ſoll die Cylinderfläche ausgebreitet werden. Da die Flächenſpur eine geſchloſſene Curve iſt, ſo muß der Cylinder vor der Entwickelung aufgeſchnitten werden, und dieß möge längs der Mantellinie Vv geſchehen. Eine Anzahl anderer Mantellinien ziehe man durch beliebige Puncte a, b, c, ... der Curve vbc.. und zeichne ihre V-Projectionen 1a', 2b', 3c', ... — Im Anfangspunct 𝔳 einer Geraden errichte man auf ihr die Senkrechte 𝔳𝔙 = mv'; dann trage man von 𝔳 aus auf der Geraden die rectificirte Länge der Curve vcwhv ab, und zwar ſo, daß 𝔳𝔞 = arc. va, 𝔳𝔟 = arc. vb, 𝔳𝔠 = arc. vc, ..., $𝔳𝔳_0$ = arc. vchv. Zieht man hierauf durch die Puncte 𝔞, 𝔟, 𝔠, ..., $𝔳_0$ Senkrechte 𝔞𝔄, 𝔟𝔅, ... zu $𝔳𝔳_0$, macht 𝔞𝔄 = 1a', 𝔟𝔅 = 2b', 𝔠ℭ = 3c', ..., $𝔳_0𝔙_0$ = m'v', und legt durch die Puncte 𝔙, 𝔄, 𝔅, ℭ, ..., $𝔙_0$ eine ſtetige Curve, ſo ſtellt dieſe die Verwandelte der Schnittcurve (vcwv, v'w') vor; die ebene Figur aber, welche die Geraden $𝔳𝔳_0$, 𝔳𝔙, $𝔳_0𝔙_0$ und die Curve $𝔙𝔄𝔅..𝔙_0$ zu Grenzen hat, iſt die Entwickelung des zwiſchen der HE und der Ebene PQP' enthaltenen Cylinderſtücks.

Die Berührungsebene bP des Cylinders ſchneidet die Ebene PQP' nach einer Geraden (bP, b'Q), welche die Schnittcurve im Puncte (b, b') berührt. Dieſe Gerade muß auch noch nach der Entwickelung des Cylindermantels eine Tangente der verwandelten Schnittcurve ſein, denn ſie iſt die Verlängerung eines Curvenelements, welches auf dem Cylinder und auf der Ebene, in welche er ausgebreitet wird, zugleich liegt. Man erhält ſie in der Entwickelung, wenn

Digitized by Google

man bP = bP macht und PB zieht. — Auf ähnliche Weiſe kann man überhaupt **jede** Tangente der Schnittcurve auf die Verwandelte übertragen, indem es gleichgiltig iſt, in welche von den unendlich vielen Berührungsebenen des Cylinders man dieſen ausgebreitet denken will.

†) Die oben angegebenen Conſtructionen gelten allgemein für jede beliebige Geſtalt der Curve vcw, können ſich aber in beſondern Fällen vereinfachen; ſo namentlich in Fig. 126, wo vcw ein Kreis vom Durchmeſſer vw iſt. Dort wählt man am beſten die Puncte a, b, c, ... ſo, daß ſie die Kreisperipherie in eine Anzahl gleicher Theile, z. B. in 12, theilen; dann macht man $vv_0 = \frac{22}{7}$ vw (§. 185) und theilt vv_0 in 12 gleiche Theile, wodurch ſich die (den Puncten a, b, c... entſprechenden) Puncte a, b, c... ergeben.

Zuſ. I. Der in Fig. 126 dargeſtellte Cylinder iſt von der **zweiten Ordnung** (§. 236, 2), und deshalb muß der gefundene Schnitt eine Linie zweiter Ordnung ſein (§. 237). Dieß läßt ſich hier ſehr leicht beweiſen: Wird nämlich die Schnittcurve um die zur VE ſenkrechte Linie (ch, c'), deren H-Projection durch den Mittelpunct o des Kreiſes vcw geht, in horizontale Lage gedreht und hier aufs neue (in 'V'A'B..) projicirt, nachdem aus verſchiedenen Puncten V, A, B, ... Senkrechte auf HC gefällt worden ſind, ſo zeigen 'Vo, 'AI, 'BII, ... die wahren Längen der Stücke, welche urſprünglich in vo, aI, bII, ... projicirt waren; aus der gleichen H-Neigung aller dieſer Stücke folgt

$$'AI : aI = 'BII : bII = \ldots = 'Vo : vo = 'Vo : oc;$$

alſo erhält man die Curve c'B'A'V.., wenn man die auf dem Durchmeſſer ch ſenkrechten Kreisſehnen in conſtantem Verhältniß verlängert, und ſie iſt mithin (dem zu Ende von §. 192, II angedeuteten Lehrſatze gemäß) eine **Ellipſe**, welche 'Vo und co zu Halbaren hat.

Zuſ. II. Die Verwandelte der ſtetigen Schnittcurve iſt wieder eine geſetzmäßige ſtetige Curve, welche aber in dem Bogen VA...V_0 nicht **vollſtändig** dargeſtellt iſt, ſondern vielmehr nach beiden Seiten durch unendlich viele Wiederholungen jenes Bogens ohne Aufhören fortläuft. Der

Digitized by Google

Grund dieſer Fortſetzung leuchtet ein, wenn man ſich um den Cylinder einen unendlich langen Ebenenſtreifen in vielen über- einanderliegenden Windungen gewickelt denkt, und beachtet, daß die Ebene PQP′ alle dieſe Windungen zugleich ſchneidet.

§. 343.

Um eine Cylinderfläche, deren Mantellinien nicht ſenkrecht auf der HE ſtehen, entwickeln zu können, muß man ſie durch eine Ebene ſenkrecht zu den Mantellinien ſchneiden; von der Rectification dieſes ſenkrechten Schnittes geht die Entwickelung der ganzen Fläche aus, wie im vorigen Beiſpiele von der Rectification der H-Spur.

Als Leitende einer Cylinderfläche ſei deren H-Spur VUW.. gegeben und außerdem eine Mantellinie (Vx, v′X′) derſelben; man verlangt die Entwickelung der Fläche und die Verwandelten ihrer beiden Spuren. Fig. 127.

Es ſei PO (⊥ Vx) die H-Spur einer zu den Mantellinien ſenkrechten Ebene E. Dieſe Ebene ſchneidet die h-projicirende Ebene der Mantellinie VX′ nach einer Geraden, welche mit der Mantellinie und ihrer H-Projection ein rechtwinkeliges Dreieck einſchließt; die Hypotenuſe iſt HV; der Scheitel des rechten Winkels liegt in dem Puncte, wo VX′ der Ebene E begegnet und welcher durch A bezeichnet ſein möge. Die horizontale Umklappung $HA_{,}V$ des genannten Dreiecks wird gefunden, wenn man die VX′ mit ihrer h-projicirenden Ebene in die HE nach $VX_{,}$ umklappt (§. 56) und $HA_{,} \perp VX_{,}$ fällt. Die Mantellinie (Wx, w′X″), welche mit VX′ die h-projicirende Ebene gemein hat, klappt ſich nach $WB_{,}$ ($\parallel VX_{,}$) um, ſo daß $B_{,}$ die Umklappung des Punctes B iſt, wo ſie die Ebene E trifft. Wird nun auch die Ebene E in die HE umgeklappt, ſo kommen die Puncte A und B nach $A_{,,}$ und $B_{,,}$ zu liegen ($HA_{,,} = HA_{,}$, $HB_{,,} = HB_{,}$) und gehören hier der Umklappung der Curve S an, in welcher der Cylinder und die Ebene E ſich ſchneiden. — Das eben erklärte Verfahren, auf zwei andere Mantellinien MY′, NY″ von gemeinſchaftlicher H-Projection an-

gewandt, liefert zwei weitere Puncte $C_{,,}$, $D_{,,}$ der mit E umgeklappten Schnittcurve S; die mit der H-projicirenden Ebene umgeklappten Dreiecke MC_1K, ND_1K findet man aber hier noch leichter als vorhin, indem die Linien MC_1 und ND_1 (wegen der gleichen H-Neigung aller Mantellinien) parallel mit VX_1 ſein müſſen. — Sucht man auf die angegebene Weiſe noch beliebig viele andere Puncte für die Umklappung der Schnittcurve S, ſo kann man die Peripherie $A_{,,}C_{,,}..D_{,,}B_{,,}..$ derſelben zeichnen.

Bei der Entwickelung des Cylinders (welche an der Mantellinie VX' beginnen möge) verwandelt ſich die Curve S in eine Gerade $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0$, welche an Länge mit der rectificirten S übereinſtimmt. Macht man $\mathfrak{A}\mathfrak{C} = \text{arc. } A_{,,}C_{,,}, \ldots$, $\mathfrak{A}\mathfrak{D} = \text{arc. } A_{,,}C_{,,}D_{,,}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \text{arc. } A_{,,}C_{,,}B_{,,}, \ldots$, zieht durch die Puncte $\mathfrak{A}, \mathfrak{C}, .., \mathfrak{D}, \mathfrak{B}, ..$ Senkrechte $\mathfrak{V}\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{M}\mathfrak{Y}'$, .. zu $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0$ und macht $\mathfrak{A}\mathfrak{V} = A_1V$, $\mathfrak{C}\mathfrak{M} = C_1M$, .., $\mathfrak{D}\mathfrak{N} = D_1N$, $\mathfrak{B}\mathfrak{W} = B_1W$, ..., ſo ſind $\mathfrak{V}, \mathfrak{M}, .., \mathfrak{N}, \mathfrak{W}, \ldots$ Puncte der verwandelten H-Spur des Cylinders; ſucht man ferner die wahren Längen der verſchiedenen Mantellinien (ſoweit ſie zwiſchen den beiden Grundebenen liegen) und macht $\mathfrak{V}\mathfrak{X}' = VX'$ $(= VX_1)$, $\mathfrak{M}\mathfrak{Y}' = MY'$, .., $\mathfrak{N}\mathfrak{Y}'' = NY''$, $\mathfrak{W}\mathfrak{X}'' = WX''$, ..., ſo ſind $\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}', .., \mathfrak{Y}'', \mathfrak{X}'', ..$ Puncte der verwandelten V-Spur. Hiernach laſſen ſich dieſe beiden Verwandelten und ſomit die Entwickelung des zwiſchen den Grundebenen enthaltenen Cylinderſtücks herſtellen. *)

†) Man ſieht, daß man der Projectionen der Curve S zur Entwickelung der Fläche nicht bedarf. Will man aber dieſe Projectionen zeichnen, ſo kann dieß mit Benützung der bisherigen Conſtructionen leicht geſchehen; denn fällt man $A_1a \perp Vx$, $B_1b \perp Vx$, $C_1c \perp My$, $D_1d \perp My$, ..., ſo ſind a, b, c, d, ... die H-Projectionen für die Puncte

*) Die Linien $\mathfrak{V}\mathfrak{X}'$ und $\mathfrak{V}_0\mathfrak{X}_0'$ müſſen von der Verwandelten $\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}'\ldots\mathfrak{X}_0'$ offenbar unter dem nämlichen Winkel geſchnitten werden, oder die beiden Tangenten der Verwandelten in den Puncten $\mathfrak{X}'$ und $\mathfrak{X}_0'$ müſſen parallel ſein.

Digitized by Google

A, B, C, D ... der Curve S und A, a, B, b, C, c, D, d, ... die zugehörigen H-Diſtanzen. *)

Die Curve S iſt die gemeinſchaftliche Orthogonalprojection der beiden Cylinderſpuren auf die Ebene E (PQP'.) Da nun in dem gewählten Beiſpiele die H-Spur VUW.. ein Kreis iſt, ſo iſt hier S eine Ellipſe (§. 200), deren Axen A,,B,, und E,,F,, leicht (nach §. 200) gefunden werden, und welche demnach aus dieſen Axen unmittelbar conſtruirt werden kann.

††) Soll eine Tangente UT an der H-Spur des Cylinders auf die Verwandelte dieſer Spur übergetragen werden, ſo betrachte man UT als die H-Spur einer durch die Mantellinie UR gehenden Berührungsebene des Cylinders und klappe die Schnittlinie TR dieſer Berührungsebene und der Ebene E mit letzterer in die HE um, indem man T mit der Umklappung R,, des Punctes verbindet, in welchem UR der E begegnet. Nach der Entwickelung fällt die Berührungsebene in die ausgebreitete Cylinderfläche und die Linie TR in die rectificirte Schnittcurve S; entſprechen alſo in der Entwickelungsfigur die Puncte ℜ, 𝔘 den Puncten R, U, ſo hat man (in der Richtung nach 𝔅 hin) ℜ𝔗 = R,,T zu machen und die Linie 𝔗𝔘 zu ziehen, welche dann die Tangente an der verwandelten H-Spur des Cylinders iſt.

§. 344.

Denkt man ſich auf der Fläche irgend eines Kegels eine Curve gezeichnet, deren ſämmtliche Puncte gleiche Entfernung von der Spitze haben, ſo iſt nach der Entwickelung des Kegels die Verwandelte dieſer Curve nothwendig ein Kreis, und ſie dient hier der Entwickelung eben ſo zur Grundlage wie der ſenkrechte Schnitt bei einem Cylinder. Eine ſolche Curve ergiebt ſich im Allgemeinen auf dem Kegel

*) Ein anderer Weg zur Auffindung der Projectionen iſt bereits aus §. 340 bekannt. Die dort gebrauchten Linien a'h', c'k', ... ſind die V-Projectionen derjenigen, welche bei der gegenwärtigen Auflöſung in HA, , KC, , ... umgeklappt ſind.

als Schnitt ſeines Mantels mit einer Kugel, deren Mittelpunct in der Kegelſpitze liegt (ſ. Kap. V). Bei einem Drehungskegel aber kann jeder Parallelkreis dafür genommen werden.

In den folgenden §§ ſoll die Aufgabe behandelt werden: den Schnitt eines Drehungskegels und einer Ebene zu projiciren, den Kegelmantel zu entwickeln und die Verwandelte des Schnittes zu zeichnen. Dabei wird die HE ſenkrecht zur Axe (o, o′s′) des Kegels und die VE ſenkrecht zur Schnittebene PQP′ angenommen.

Jede ſolche Kegelfläche iſt (da ſie einen Kreis zur Leitenden hat) eine Fläche zweiter Ordnung (§. 236, 1) und ihr Schnitt eine Linie zweiter Ordnung (vgl. §. 237).

§. 345.

Fig. 128. I.) Wird die Schnittebene PQP′ nur von dem einen der beiden Kegelmäntel getroffen ohne mit irgend einer Mantellinie parallel zu ſein, ſo iſt die Schnittcurve nothwendig in ſich geſchloſſen. Ihre V-Projection iſt v′w′. Ihre H-Projection kann auf doppelte Weiſe gefunden werden, je nachdem man den Kegel als Regelfläche oder als Drehungsfläche anſehen will. Im erſten Falle ſucht man die H-Projectionen U_1o, U_2o zweier Mantellinien, deren gemeinſchaftliche V-Projection s′u′ beliebig angenommen wurde, und hierauf die H-Projectionen a_1, a_2 der in a′ v-projicirten Puncte, wo jene Mantellinien der Ebene PQP′ begegnen; die erhaltenen Puncte (a′, a_1), (a′, a_2) liegen auf der geſuchten Schnittcurve, und man kann deren auf die erklärte Art beliebig viele finden. Im zweiten Falle projicirt man einen beliebigen Parallelkreis (h′i′, a_1ia_2..) und die Gerade (a′, a_1a_2), nach welcher ſeine Ebene die PQP′ ſchneidet; die Begegnungspuncte (a_1, a′), (a_2, a′) der Geraden und des Parallelkreiſes gehören der Schnittcurve an.

Die Tangente der Schnittcurve im Puncte (a_2, a′) liegt ſowohl in PQP′ als in der Berührungsebene des Kegels, welche durch die Mantellinie (oa_2U_2, s′u′) geht und U_2P

zur H-Spur hat (§. 335); daher iſt P die H-Spur und Pa_2 die H-Projection dieſer Tangente; die V-Projection fällt in QP′.

Daß die Schnittcurve eine Ellipſe iſt, läßt ſich zeigen wie folgt. Es ſei $c'v' = c'w' = \alpha$, k′c′l′ die V-Projection eines Parallelkreiſes. Dieſer Kreis hat mit der Schnittcurve eine Sehne (c_1c_2, c′) gemein, deren Hälfte ($= Ic_1$) durch β bezeichnet ſein mag, ſo daß alſo $\beta^2 = k'c'.cl'$. Die Hälfte derjenigen Sehne (a_1a_2, a′) der Schnittcurve, welche zugleich dem durch (a_1, a′) gehenden Parallelkreiſe (a_1i, h′i′) angehört, heiße y, ſo daß $y^2 = h'a'.a'i'$. Ferner ſetze man $c'a' = x$. Nun iſt

$$\begin{array}{rcl} a'h' : a'w' &=& c'k' : c'w' \\ a'i' : a'v' &=& c'l' : c'v' \\ \hline a'h' . a'i' : a'w' . a'v' &=& c'k . c'l' : c'w' . c'v' \end{array}$$

d. i. $$y^2 : (\alpha - x)(\alpha + x) = \beta^2 : \alpha^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (G).$$

Dieſe Gleichung zeigt, daß (a_1, a′) auf einer Ellipſe liegt, deren Axen (vw, v′w′) und (c_1c_2, c′) ſind (§. 192. II).

Auch die H-Projection der Schnittcurve iſt eine Ellipſe und vw, c_1c_2 ſind ihre Axen. Denn ſetzt man $Iv = \mathfrak{a}$, $Ic_1 = \mathfrak{b}$, $III = \mathfrak{x}$, $IIa_1 = \mathfrak{y}$, ſo iſt

$$\mathfrak{b} = \beta, \quad \mathfrak{y} = y,$$

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{a} : \mathfrak{x} &=& \alpha : x \ (\text{§. } 25) \\ \mathfrak{a} : \mathfrak{a} - \mathfrak{x} &=& \alpha : \alpha - x \\ \mathfrak{a} : \mathfrak{a} + \mathfrak{x} &=& \alpha : \alpha + x \\ \hline \mathfrak{a}^2 : (\mathfrak{a} - \mathfrak{x})(\mathfrak{a} + \mathfrak{x}) &=& \alpha^2 : (\alpha - x)(\alpha + x) \end{array}$$

folglich (mit Rückſicht auf die obige Gleichung G nach Vertauſchung ihrer Mittelglieder)

$$\mathfrak{y}^2 : (\mathfrak{a} - \mathfrak{x})(\mathfrak{a} + \mathfrak{x}) = \mathfrak{b}^2 : \mathfrak{a}^2$$

Entwickelung.

Die Entwickelung des von der Spitze bis zur HE reichenden und nach der Mantellinie SN aufgeſchnittenen Kegelſtücks liefert einen Kreisſector, deſſen Bogen die Verwandelte der horizontalen Kegelſpur $MU_1N..$ vorſtellt. Der Halbmeſſer SN dieſes Bogens hat die Länge s′n′ und heiße R; der rectificirte Bogen iſt der Rectification des Kreiſes $MU_1N..$

Digitized by Google

(deſſen Halbmeſſer durch R bezeichnet ſein möge) gleich; ſeine Endpuncte $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}_0$ können alſo entweder auf die zu Ende des §. 185 angegebene Weiſe gefunden werden (wobei man am beſten thut, nur $\frac{1}{n}$ des Kreiſes $MU_1N..$ zu rectificiren, ein der Rectification gleiches Stück auf der Peripherie des Kreiſes $\mathfrak{N}\mathfrak{U}_1..$ abzutragen und dieſes Stück nmal zu nehmen), oder dadurch, daß man den Centriwinkel $\mathfrak{N}\mathfrak{S}\mathfrak{N}_0 = \varphi$ des Sectors $\mathfrak{N}\mathfrak{S}\mathfrak{N}_0\mathfrak{N}$ unmittelbar (mit Hülfe eines Maßſtabes und Transporteurs) aus der Gleichung

$$\varphi = 360° \cdot \frac{R}{\mathfrak{R}} \quad \ldots \quad (\mathfrak{G})$$

ſucht, deren Richtigkeit einleuchtet, wenn man bemerkt, daß die ganzen Peripherien der Kreiſe $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_0...$ und $MU_1N..$ ſich $= \mathfrak{R} : R$ verhalten und der (dem Kreiſe $MU_1N..$ gleiche) Bogen $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_0$ zu der Peripherie ſeines Kreiſes im Verhältniß von $\varphi : 360°$ ſteht.

Hat man irgend eine beſtimmte Mantellinie $(oU_2, s'u')$ des Kegels in der Entwickelung anzugeben, ſo macht man arc. $\mathfrak{N}_0\mathfrak{U}_2$ = arc. NU_2 und zieht $\mathfrak{S}\mathfrak{U}_2$. — In Fig. 128 ſind die Mantellinien, welche man zur Beſtimmung der Schnittcurve anwandte, ſo gewählt, daß ihre H-Spuren den Kreis $MU_1N..$ in 12 gleiche Theile theilen; man erhält daher ihre Lagen in der Entwickelung, wenn man den Bogen $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_0$ in 12 gleiche Theile theilt und die Theilpuncte mit $\mathfrak{S}$ verbindet.

Um den Punct (a_2, a') der Schnittcurve in der Entwickelung wieder zu finden, trägt man auf $\mathfrak{S}\mathfrak{U}_2$ von $\mathfrak{S}$ nach $\mathfrak{A}_2$ das Stück $(oa_2, s'a')$ ab, deſſen wahre Länge = s'h' iſt. Auf dieſe Art kann man alle projicirten Puncte des Schnittes in die Entwickelung übertragen und dann durch ſtetige Verbindung der erhaltenen Lagen die Verwandelte $\mathfrak{V}\mathfrak{W}\mathfrak{V}_0$ der Schnittcurve zeichnen.

Die Berührungsebene des Kegels, in welcher die Tangente $(a_2P, a'Q)$ der Schnittcurve liegt, fällt nach dem Entwickeln mit der Ebene zuſammen, in welche ſich der Kegel-

Digitized by Google

mantel ausbreitet; $U_2 P$ wird dann eine Tangente für die Verwandelte des Kreiſes $MU_1N..$ und $(a_2P, a'Q)$ eine Tangente für die verwandelte Schnittcurve. Die Lage der erſtern erhält man alſo, wenn man $U_2\mathfrak{P} \perp \mathfrak{S}U_2$ zieht; die Lage der letztern, wenn man $U_2\mathfrak{P} = U_2P$ macht und $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{A}_2$ verbindet.

†.) Der Bogen $\mathfrak{WBW}_0$ des verwandelten Schnitts iſt nur ein Theil einer ſtetigen Curve; um dieſe vollſtändig zu erhalten, hat man ſich den Kegel von einer Ebene mehrfach umwunden zu denken (vgl. Zuſ. II. zu §. 342); die zweite Abwindung giebt dann den Sector $\mathfrak{N}_0\mathfrak{S}2_0$, die dritte den Sector $2_0\mathfrak{S}3_0$, u. ſ. f., und jene Curve ſetzt ſich durch alle dieſe neuen Sectoren fort, indem der Bogen $\mathfrak{WBW}_0$ ſich in jedem Sector wiederholt. Dieſe Wiederholung der congruenten Bögen kann ohne Ende ſein; fällt aber irgend einmal einer der weitern Sectoren ganz in den erſten, ſo kehrt die Curve in ſich ſelbſt zurück. Letzteres muß eintreten, wenn die Radien R, $\mathfrak{R}$ der Kreiſe MU_1N und $\mathfrak{NMN}_0..$ commenſurabel ſind oder ein rationales Verhältniß haben. Iſt nämlich $R:\mathfrak{R} = n:m$ (wo m und n ganze Zahlen ſind), ſo iſt (nach der frühern Gleichung (G))

$$m \cdot \varphi = n \cdot 360^\circ,$$

d. h. m aneinandergereihte Sectoren vom Winkel φ bilden nmal die ganze Kreisfläche und der $(m+1)^{te}$ fällt in den erſten. In Fig. 128 iſt

$$o'n' : s'n' = 2:5$$

d. i. $R = \frac{2}{5}\,\mathfrak{R}$ und $\varphi = \frac{2}{5} \cdot 360^\circ$; das Fünffache des Bogens $\mathfrak{NN}_0$ iſt alſo der doppelten Peripherie des ganzen Kreiſes $\mathfrak{NM}..$ gleich; daher kehrt der Bogen $\mathfrak{WBW}_0$ der verwandelten Schnittcurve fünfmal wieder und die ſechſte Wiederholung kommt ganz in den erſten Bogen zu liegen.

§. 346.

II.) Iſt die Schnittebene PQP' parallel mit einer Mantellinie (oN, s'n') des Kegels, ſo kann die Schnittcurve nicht geſchloſſen ſein, ſondern muß in zwei Zweigen einem Fig. 129.

Digitized by Google

unendlich fernen Puncte zuſtreben, indem die Schnitte der Mantellinien mit der Ebene PQP′ in um ſo größere Entfernung von (v, v′) fallen, je mehr ſich die Mantellinien von beiden Seiten her der (oN, s′n′) nähern. Die Schnittcurve und eine ihrer Tangenten läßt ſich wie in §. 345 projiciren.

Die Curve iſt eine Parabel, deren Scheitel in (v, v′) und deren Axe in (vN, v′Q) liegt. Denn ſind in h′i′, m′n′ zwei Parallelkreiſe des Kegels projicirt, welche der Schnittcurve in (a_1, a') und (b_1, b') begegnen, und man ſetzt $(vI, v'a') = x$, $(vII, v'b') = {}'x$, $(a_1 II, a') = y$, $(b_1 II, b') = {}'y$, ſo iſt

$$y^2 = h'a' . a'i'$$
$${}'y^2 = m'b' . b'n'$$

alſo (wegen $h'a' = n'b'$)

$$y^2 : {}'y^2 = a'i' : b'm'$$
$$= x : {}'x$$

in welcher Gleichung die weſentliche Eigenſchaft der Parabel ausgedrückt iſt (vgl. §. 192, I).

Die Werthe y und ′y gelten zugleich für die Ordinaten Ia_1, IIb_1 der H-Projection der Curve, und wenn man die zugehörigen Abſciſſen vI, vII durch $\mathfrak{x}$ und ${}'\mathfrak{x}$ bezeichnet, ſo hat man (wegen $\mathfrak{x} : {}'\mathfrak{x} = x : {}'x$) für dieſe Projection die Gleichung

$$y^2 : {}'y^2 = {}'\mathfrak{x} : \mathfrak{x},$$

woraus folgt, daß auch die Projection eine Parabel iſt.

Entwickelung.

Die Entwickelung des Kegelmantels und die Zeichnung des verwandelten Schnittes geſchieht wie in §. 345. Die Verwandelte ſetzt ſich (wie die urſprüngliche Parabel ſelbſt) über die Puncte b_1 und b_2 ohne Ende fort.

†.) Bei wiederholtem Abwinden der Mantelfläche erſcheinen mehrere ſolche in's Unendliche laufende und mit $b_1 \mathfrak{B} b_2$ . . congruente Äſte. Die Anzahl dieſer Äſte iſt nur dann eine endliche, wenn das Verhältniß o′n′ : s′n′ (R : ℜ) rational iſt (wie in Fig. 129, wo der Exponent deſſelben $= \frac{2}{3}$).

§. 347.

Fig. 130. III.) Wenn die Schnittebene PQP′ die beiden Kegelmäntel trifft, wie in Fig. 130, ſo beſteht die Schnittcurve

aus zwei getrennten unendlichen Äſten und kann (am beſten durch Anwendung von Parallelkreiſen) wie in §. 345 projicirt werden.

Eine parallel zu PQP′ durch die Kegelſpitze gelegte Ebene $U_1u's'$ ſchneidet den Kegel in zwei Mantellinien $(U_1o, u's')$, $(U_2o, u's')$, welche der PQP′ ebenfalls parallel ſind. Denkt man ſich die Erzeugende des Kegels aus der Lage (oM, s′m′) in die Lage $(oU_1, s'u')$ gedreht, ſo rückt während der Drehung der Schnittpunct der Erzeugenden in der Ebene PQP′ in immer größere Entfernung von (v, v′), und wenn endlich die zuletzt genannte Lage erreicht iſt, ſo ſagt man, dieſer Schnittpunct ſei in unendliche Entfernung gefallen. Dasſelbe gilt für den Schnittpunct der Lage $(oU_2, s'u')$. Will man durch den unendlich fernen Punct der Schnittcurve, welcher auf $(oU_2, s'u')$ liegt, eine Tangente an ſie ziehen, ſo erhält man ſtatt einer wirklichen Tangente eine Aſymptote (§. 180); die Projectionen derſelben ergeben ſich aber nach derſelben Methode, welche in §. 345 und §. 346 zur Auffindung einer Tangente in Anwendung gebracht wurde. Die Aſymptote iſt nämlich der Schnitt der Ebene PQP′ und einer durch $(oU_2, s'u')$ gelegten Berührungsebene des Kegels, mithin parallel zu $(oU_2, s'u')$, und man erhält ihre H-Projection, wenn man $U_2P \perp oU_2$ und $Pd \parallel U_2o$ zieht. In gleicher Weiſe führt die $(oU_1, s'u')$ auf eine zweite Aſymptote, deren H-Projection P′d iſt. *)

Die Schnittcurve iſt eine Hyperbel, welche (v′, v), (w′, w) zu Scheiteln hat (weshalb bei richtiger Zeichnung die projicirten Aſymptoten durch die Mitte c von vw gehen müſſen). Denn iſt

*) Bei dem paraboliſchen Schnitte in Fig. 129 giebt es eine Mantellinie (oN, s′n′), welche die Ebene PQP′ erſt in unendlicher Entfernung trifft. Eine durch ſie gelegte Berührungsebene r des Kegels iſt aber hier parallel zu PQP′. Daher hat die Parabel für ihren unendlich fernen Punct keine Aſymptote (indem dieſe der Schnitt der Ebenen r und PQP′ ſein müßte und ein ſolcher Schnitt hier nicht exiſtirt.)

Digitized by Google

(a_1, a') ein beliebiger Punct der Curve, $(h a_1 a_2, h'i')$ der durch ihn gehende Parallelkreis, und man ſetzt $(a_1 II, a') = y$, $(c II, c'a') = x$, $(cw, c'w') = \alpha$, ſo folgt aus

$$v'a' : a'h' = v'c' : c'k'$$

und

$$w'a' : a'i' = w'c' : c'l'$$

durch Multiplication und Subſtitution die Proportion

$$(x + \alpha)\ (x - \alpha) : y^2 = \alpha^2 : c'k' \,.\, k'l'.$$

Die Stücke $k'l'$ und $c'k'$ ſind aber conſtant für alle Lagen des Punctes (a_1, a'); daher iſt auch ihr Produkt eine conſtante Größe und kann durch ein einziges Zeichen, etwa durch β^2, benannt werden; dadurch nimmt obige Gleichung die Form

$$y^2 : (x - \alpha)\ (x + \alpha) = \beta^2 : \alpha^2$$

an, unter welcher ſie mit der in §. 192, III für die Hyperbel gefundenen Gleichung übereinſtimmt. *)

Daß die H-Projection des Schnittes zu derſelben Curvenart gehört wie der Schnitt ſelbſt, läßt ſich auf ähnliche Weiſe zeigen wie in §. 345.

Entwickelung.

Da hier beide Kegelmäntel geſchnitten worden ſind,

---

*) Eine weitere Betrachtung der Fig. 130 beſtätigt, daß die Größe β das zwiſchen den Aſymptoten enthaltene Stück einer durch den Scheitel gelegten (alſo auf der reellen Axe ſenkrechten) Tangente der Hyperbel iſt (vgl. §. 192, III). Zieht man nämlich $s'c'$, dann $w'\gamma' \parallel s'c'$ bis an $u's'$.., ferner $x'\gamma'\lambda' \parallel h'i'$, ſo iſt $\gamma'\lambda' = c'l'$ und $\gamma'x' = c'k'$, mithin $c'k' \,.\, c'l' = \gamma'x' \,.\, \gamma'\lambda'$. Die Größe β iſt alſo einer in γ' projicirten Sehne Γ des in $x'\lambda'$ projicirten Parallelkreiſes gleich, und dieſe Sehne hat wieder einerlei Länge mit einer in w' projicirten und durch die Aſymptoten begrenzten Geraden B. Denn B bildet die Baſis eines gleichſchenkeligen Dreiecks, deſſen Spitze in (c, c') liegt und deſſen gleiche Seiten in die Aſymptoten fallen; Γ iſt die Baſis eines andern gleichſchenkeligen Dreiecks, deſſen Spitze in (s, s') liegt und deſſen andere Seiten-Stücke der (mit den Aſymptoten parallelen) Linien U_1S.. und U_2S.. ſind; beide Dreiecke ſind aber congruent, weil ſie in der Höhe $(c'w' = s'\gamma')$ und dem Winkel an der Spitze übereinſtimmen; alſo $B = \Gamma = \beta$.

Digitized by Google

und alſo auch beide entwickelt werden müſſen, wenn man die Verwandelte des Schnitts haben will, ſo beſteht die Entwickelung aus *zwei* Kreisſectoren $SNMN_0S$ und $SFEF_0S$, welche in Fig. 130 einerlei Halbmeſſer haben, weil man als Begrenzung für den obern Kegelmantel eine horizontale Ebene EF gewählt hat, welche von der Spitze S eben ſo weit entfernt iſt wie letztere von der HE. Der Kegel ſelbſt wurde nach der Linie NSF aufgeſchnitten; daher beſteht die Verwandelte des auf dem obern Mantel gelegenen Aſts der Schnittcurve aus zwei getrennten Stücken WT_2, W_0T_1, während die Verwandelte Z_1VZ_2 des untern Aſts ungetrennt bleibt. Die einzelnen Puncte der Verwandelten ergeben ſich leicht, wenn man die Verwandelten der durch die urſprünglichen Puncte gehenden Parallelkreiſe zeichnet und die betreffenden Mantellinien in die Entwickelung überträgt. So iſt z. B. HJH_0 die Verwandelte des Parallelkreiſes (hb_2, $h''i''$) (wobei $SH = s'h''$) und SB_2 die Lage der Mantellinie SB_2 nach dem Entwickeln, alſo B_2 der Punct, welcher in der Verwandelten den Punct (b_2, b') der Schnittcurve darſtellt.

Macht man $U_2P \perp SU_2$, $U_2P = U_2P$, $PD \parallel SU_2$, ſo entſpricht PD in der Entwickelung der Aſymptote PD und bleibt auch für die Verwandelte eine Aſymptote, welcher ſich ſowohl der Zweig VZ_2.. als der Zweig W_0T_1.. ohne Ende nähert. Auf gleiche Art ergiebt ſich die Lage $'P'D$ der zweiten Aſymptote.

†.) Durch *wiederholtes* Abwickeln der Kegelfläche kehren die eben gezeichneten Bögen der Verwandelten immer wieder und reihen ſich zum Theil aneinander. Wenn dieſe Bögen auf eine *endliche* Anzahl beſchränkt bleiben ſollen, müſſen $s'n'$ und $o'n'$ (N und R) commenſurabel ſein, wie in Fig. 130, wo $o'n' : s'n' = 2 : 3$. In Fig. 130^b iſt für den vorliegenden Fall die Verwandelte *vollſtändig* gezeichnet.

§. 348.

Unter den *windſchiefen* Flächen geſtattet in Beziehung auf ebene Schnitte das *Drehungshyperboloid* dieſelbe einfache Behandlung, wie unter den entwickelbaren

Digitized by Google

der Drehungskegel; nämlich die Anwendung von **kreisförmigen** Hülfsſchnitten.

Um den Schnitt eines Drehungshyperboloids und einer Ebene zu erhalten, braucht man blos **ein** Syſtem von Mantellinien in Betracht zu ziehen; denn die Anwendung des zweiten Syſtems würde nur wieder auf die nämlichen Schnittpuncte führen. Zu leichterer Überſicht des Folgenden ſoll daher auch nur ein einziges Syſtem als vorhanden gedacht werden, nämlich dasjenige, welches von der Erzeugenden durchlaufen wird.

Fig. 131. Wenn ein ſolches Hyperboloid durch ſeine verticale Drehungsaxe (o, o′o′′) und ſeine gerade Erzeugende (Vw, v′w′) gegeben iſt und die VE ſenkrecht zur Schnittebene PQP′ angenommen wird, ſo läßt ſich zum Voraus entſcheiden, ob die Schnittcurve geſchloſſen ſei oder nicht. Das Erſtere wird der Fall ſein, wenn die Ebene PQP′ den aſymptotiſchen Kegel in einer Ellipſe ſchneidet; denn da hier alle Mantellinien dieſes Kegels der Ebene PQP′ begegnen, ſo müſſen auch alle Mantellinien des Hyperboloids (als Parallelen zu jenen des Kegels) die Ebene PQP′ ſchneiden und die Schnittcurve kann alſo keinen unendlich fernen Punct haben. Wird der aſymptotiſche Kegel von der Ebene PQP′ nach einer Parabel geſchnitten, d. h. iſt **eine** Mantellinie des Kegels parallel mit PQP′, ſo iſt auch **eine** Mantellinie des Hyperboloids parallel mit PQP′; der Schnitt der letztern Fläche hat alſo **einen** unendlich fernen Punct. Wird endlich der aſymptotiſche Kegel nach einer Hyperbel geſchnitten (wobei alſo **zwei** ſeiner Mantellinien parallel zu PQP′ ſind), ſo ſind **zwei** Mantellinien des Hyperboloids parallel zu PQP′ (ohne unter ſich parallel zu ſein) und mithin hat der Schnitt des Hyperboloids **zwei** unendlich ferne Puncte. *)

---

*) Da das Hyperboloid ſelbſt nach einer Linie zweiter Ordnung geſchnitten wird (§. 237), ſo folgt aus Obigem, daß ſein Schnitt immer mit dem Schnitte des aſymptotiſchen Kegels von einerlei Art iſt.

Digitized by Google

Für den letzten Fall paßt die Fig. 131, in welcher $T_1 z T_2$ .. die H-Spur und m'o'v' der verticale Umriß des aſymptotiſchen Kegels iſt (vgl. §. 234). — Die Schnittcurve hat hier zwei Aſymptoten, und dieſe ergeben ſich durch die Schnitte der Ebene PQP' mit den beiden aſymptotiſchen Ebenen (§. 282), welche durch die mit PQP' parallelen Mantellinien des Hyperboloids gehen. Dieſe aſymptotiſchen Ebenen berühren zugleich (nach §. 282) den aſymptotiſchen Kegel in den beiden Linien (o't', oT_1), (o't', oT_2), welche mit jenen Mantellinien des Hyperboloids oder mit der Ebene PQP' parallel ſind; hiernach findet man T_1S_1, T_2S_2 als H-Spuren der aſymptotiſchen Ebenen und S_1, S_2 als H-Spuren der Aſymptoten. Die Aſymptoten ſelbſt laufen parallel mit (o't', oT_1), (o't', oT_2); daher ſind S_1c (|| T_1o) und S_2c (|| T_2o) ihre H-Projectionen. (Man ſieht, daß dieſe Aſymptoten zugleich die Aſymptoten der Hyperbel ſind, in welcher der aſymptotiſche Kegel durch die Ebene PQP' geſchnitten wird. Vgl. §. 347.)

Die Schnittcurve ſelbſt wird (wie ſchon oben bemerkt) nach der für Drehungsflächen überhaupt geltenden Methode projicirt. Ihre H-Projection muß die H-Projection des Äquators berühren (§. 299, I) und die den Berührungspuncten b_1, b_2 gemeinſchaftlich zugehörige V-Projection iſt der Punct b', wo QP' die V-Projection des Äquators ſchneidet.

Schnitte der Rückungsflächen.

§. 349.

Die einzelnen Lagen der ebenen Curve, welche durch geſetzmäßige Rückung eine krumme Fläche erzeugt, laſſen ſich auf eine zu ihnen parallele HE unmittelbar projiciren, da ſie unter ſich entweder congruent oder ähnlich ſind, und eine dieſer Lagen gegeben ſein muß *); ihre V-Projectionen ſind dann Gerade. Die Ebenen dieſer verſchiedenen Lagen machen alſo hier das in §. 333 erwähnte Syſtem von Hülfsebenen aus.

*) Wie man eine Curve zeichnen kann, welche einer gegebenen ähnlich iſt, folgt aus §. 177.

Digitized by Google

§. 350.

Bei den *Flächen zweiter Ordnung* würde man nach dem Vorigen die erzeugende Ellipſe (oder Parabel) in einer hinreichenden Anzahl von Lagen zu projiciren haben. Da aber die analytiſche Geometrie nachweiſt, daß jede ſolche Fläche durch parallele Ebenen *in ähnlichen Ellipſen* geſchnitten werden kann (mit Ausnahme des hyperboliſchen Paraboloids), deren Projectionen wieder ähnliche Ellipſen ſind, ſo vertauſcht man beſſer die von den Lagen der Erzeugungsellipſe hergenommenen Hülfsebenen mit einem andern Syſtem paralleler Schnittebenen, *welche man ſo wählt, daß die Projectionen der elliptiſchen Schnitte Kreiſe geben.*

Als Beiſpiel folgt in §. 351 der Schnitt eines *Ellipſoids* durch eine beliebige Ebene. Für dieſe Fläche laſſen ſich die vorhin angeführten Sätze auch ohne Hülfe der analytiſchen Geometrie leicht für den beſondern Fall beweiſen, wo die parallelen Hülfsebenen ſenkrecht zu einer Hauptebene ſind, und dieſe Beweiſe ſollen der Auflöſung der erwähnten Aufgabe vorausgehen.

1.) Ein *Drehungs*-Ellipſoid wird von jeder beliebigen Ebene in einer *Ellipſe* geſchnitten.

Bew. Die VE ſei durch die Drehungsaxe ſenkrecht zur Schnittebene PQP′ gelegt, ſo daß ſich die Schnittcurve E in v′w′
Fig. 132. v-projicirt, wobei v′w′ zugleich dieſe Curve in ſymmetriſche Hälften theilt. Iſt m′n′ die V-Projection irgend eines Parallelkreiſes, welcher die Curve E im Puncte A ſchneidet, und man ſetzt $Aa' = y$, ſo iſt

$$y^2 = m'a' \cdot a'n'.$$

Betrachtet man die Meridian-Ellipſe m′v′n′w′ als V-Projection eines Kreiſes $\mathfrak{MVNW}$ und die Linien v′w′, m′n′ als Projectionen zweier Kreisſehnen $\mathfrak{VW}$, $\mathfrak{MN}$, deren Schnittpunct $\mathfrak{A}$ ſich in a′ projicirt, ſo iſt

$$\mathfrak{VA} \cdot \mathfrak{AW} = \mathfrak{MA} \cdot \mathfrak{AN}.$$

Da nun (wenn φ die V-Neigung der Linie $\mathfrak{MN}$ und ψ die V-Neigung der Linie $\mathfrak{VW}$ bezeichnet) $v'a' = \mathfrak{VA} \cdot \cos\psi$, $a'w' = \mathfrak{AW} \cdot \cos\psi$, $m'a' = \mathfrak{MA} \cdot \cos\varphi$, $a'n' = \mathfrak{AN} \cdot \cos\varphi$, ſo verwandelt

ſich die vorige Gleichung durch Subſtitution in

$$\frac{v'a'}{\cos\psi} \cdot \frac{a'w'}{\cos\psi} = \frac{m'a'}{\cos\varphi} \cdot \frac{a'n'}{\cos\varphi}$$

oder $v'a' \,.\, a'w' : m'a' \,.\, a'n' = \cos\psi^2 : \cos\varphi^2$.

Iſt ferner m′n′ (‖ m′n′) die Projection einer mit MN parallelen Kreisſehne (welche alſo mit MN die V-Neigung φ gemein hat), ſo iſt aus den vorigen Gründen

$$v'a' \,.\, a'w' : m'a' \,.\, a'n' = \cos\psi^2 : \cos\varphi^2.$$

Der Parallelkreis des Ellipſoids, welcher ſich in m′n′ projicirt, ſchneidet die Curve E in einem Puncte, deſſen V-Diſtanz durch $\mathfrak{y}$ bezeichnet ſein mag, ſo daß $\mathfrak{y}^2 = m'a' \,.\, a'n'$, und man hat alſo (mit Berückſichtigung der frühern Gleichungen)

$$y^2 : v'a' \,.\, a'w' = \mathfrak{y}^2 : va' \,.\, a'w',$$

d. h. in der Schnittcurve E ſteht das Quadrat einer auf v′w′ ſenkrechten Ordinate in conſtantem Verhältniß zu dem Producte der beiden Abſchnitte, in welche die v′w′ durch die Ordinate zerlegt wird. Dieß iſt aber eine weſentliche Eigenſchaft der **Ellipſe.**

Verſetzt man a′ in die Mitte c′ von v′w′ (mithin m′n′ nach k′l′), bezeichnet durch β die N-Diſtanz des Punctes C, in welchem der Parallelkreis HCL die Curve E ſchneidet, und ſetzt $v'c' = \alpha$, $c'a' = x$, ſo erhält man ſtatt der letzten Gleichung die folgende:

$$y^2 : (\alpha + x)\,(\alpha - x) = \beta^2 : \alpha^2,$$

übereinſtimmend mit der in §. 192. II gefundenen Ellipſengleichung. Die große Halbaxe der Ellipſe E iſt c′v′; die kleine Halbaxe hat die Länge cl.

2.) Parallele Ebenen ſchneiden ein Drehungsellipſoid in **ähnlichen** Ellipſen.

Bew. Es ſei RSR′ ‖ PQP′ und v″w″ die V-Projection des Schnittes *e* der erſtern Ebene. Der durch c′ gehende Durchmeſſer g′h′ der Meridianellipſe m′v′n′ . . . **halbirt** die Sehne v″w″ in c″ (§. 201); daher iſt c″w″ ($=\alpha_0$) die große Halbaxe der Ellipſe *e* und die kleine Halbaxe (β_0) iſt in c″ v-projicirt. In der Meridianellipſe gilt (nach 1.) die Gleichung Fig. 132.

$$g'c' \,.\, c'h' : v'c' \,.\, c'w' = g'c'' \,.\, c''h' : v''c'' \,.\, c''w''$$

d. i. $g'c' \,.\, c'h' : \alpha^2 = g'c'' \,.\, c''h' : \alpha_0^2$

oder $\alpha^2 : \alpha_0^2 = g'c' \,.\, c'h' : g'c'' \,.\, c''h'$.

Digitized by Google

In der Ellipſe, nach welcher das Ellipſoid von der Ebene Zz'g' (⊥ VE) geſchnitten wird, ſind β und β_0 zwei auf g'h' ſenkrechte Ordinaten; alſo

$$\beta^2 : \beta_0^2 = g'c' . c'h' . g'c'' . c''h'.$$

Aus dieſer und der vorigen Gleichung folgt

$$\alpha : \alpha_0 = \beta : \beta_0,$$

d. h. die Ellipſe E und e ſind ähnlich (§. 193).

3.) Ein Ellipſoid, welches nicht durch Drehung zu erzeugen iſt, wird von einer zu einer Hauptebene ſenkrechten Ebene in einer Ellipſe geſchnitten, deren eine Axe in der Hauptebene liegt, während die andere ſenkrecht auf der Hauptebene ſteht. Mehrere ſolche Ebenen bringen, wenn ſie parallel ſind, ähnliche Schnitte hervor.

Bew. Aus einem Drehungs-Ellipſoid läßt ſich ein Ellipſoid der oben erwähnten Art bilden, wenn man aus allen Puncten des erſtern Senkrechte auf eine Meridianebene M fällt und dieſe alle in dem nämlichen Verhältniß m : n verkürzt. Dieß läßt ſich eben ſo nachweiſen, wie es in §. 252 für einen verwandten Fall geſchah. Die Ebene M wird eine Hauptebene des neuen Ellipſoids. Schneidet nun eine zu M ſenkrechte Ebene das Drehungs-Ellipſoid in der Ellipſe E und das neue Ellipſoid in der Curve 𝔈, ſo iſt offenbar 𝔈 aus E dadurch entſtanden, daß man aus den ſämmtlichen Puncten der Ellipſe E Senkrechte auf ihre in M liegende Axe fällte und alle im Verhältniß von m : n verkürzte. Auf dieſe Art muß aber wieder eine Ellipſe zum Vorſchein kommen, was ſogleich klar wird, wenn man über der gemeinſchaftlichen Axe der Curven E und 𝔈 einen Halbkreis K errichtet und die Senkrechten (Ordinaten) rückwärts bis an ſeine Peripherie verlängert. Iſt nämlich (Fig. 133) AB die Axe, o ihre Mitte, oK ⊥ AB, p ein beliebiger Punct in AB, pQ ⊥ AB, ſo iſt

$$Qp : Pp = Ko : Eo \; (= v : w)$$
$$Pp : 𝔓p = Eo : 𝔈o \; (= m : n)$$

alſo $$Qp : 𝔓p = Ko : 𝔈o \; (= vm : wn),$$

d. h. man kann die Curve 𝔈 aus dem Kreiſe K nach demſelben Geſetze erhalten, wie die Curve E, nur daß das Verkürzungsverhältniß der Kreisordinaten ein anderes iſt.

Alle parallelen Schnitte (E) des Drehungsellipſoids ſind

ähnlich (2.) oder haben einerlei Axenverhältniß (v : w); die entſprechenden Parallelſchnitte (E) des neuen Ellipſoids müſſen daher ebenfalls einerlei Axenverhältniß (vm : wn) haben oder ähnlich ſein.

4.) Die Mittelpuncte der parallelen Schnitte E des Drehungsellipſoids fallen (wie aus 2 folgt) in einen Durchmeſſer (g'h') der Fläche, welcher in der auf den Schnittebenen ſenkrechten Meridianebene M liegt (und den Schnitten E zugeordnet iſt). Dasſelbe muß aber auch für die auf der (Haupt-) Ebene M ſenkrechten Schnitte E des neuen Ellipſoids gelten, weil dieſe mit den vorigen Schnitten E die Mittelpuncte gemeinſchaftlich haben.

5.) Werden die zuletzt erwähnten Parallelſchnitte E auf drei mit den Hauptebenen parallele Grundebenen projicirt, ſo ſind die Projectionen auf der einen gerade Linien, auf jeder andern aber Ellipſen, und die auf einerlei Grundebene liegenden ſind ſich ähnlich.

Daß eine Ellipſe, deren eine Axe β parallel zur Grundebene iſt, ſich wieder als Ellipſe projicirt, wurde ſchon in §. 345 gezeigt (kann aber auch ſehr einfach mittels Fig. 133 bewieſen werden, wenn man AEB als Umklappung einer in AEB projicirten Curve anſieht); die Projection der Axe β iſt die eine Axe der Curvenprojection; die Länge der zweiten iſt $\alpha . \cos \varphi$, wenn α die zweite Axe der wahren Ellipſe und φ die G-Neigung ihrer Ebene vorſtellt. Mehreren ſolchen Ellipſen, welche unter ſich ähnlich ſind und deren Ebenen zugleich einerlei G-Neigung φ haben (wie die Ellipſen E), müſſen ähnliche Projectionen zukommen; denn hat jede von den wahren Ellipſen das Axenverhältniß $\alpha : \beta$, ſo iſt $\alpha \cos \varphi : \beta$ das Axenverhältniß für jede Projection. *)

*) Die oben bewieſenen Sätze ſind zum Theil dieſelben, welche der Auflöſung der Aufgabe in §. 318, auf ein Ellipſoid bezogen, zu Grunde liegen. Der Beweis für den auf umſchriebene Kegel bezüglichen Lehrſatz, welcher dort noch benützt wurde, läßt ſich hier ebenfalls leicht anreihen (ohne daß man auf den im Anhange gegebenen allgemeinen Beweis zurückzugehen braucht).

Betrachtet man nämlich in Fig. 132 die Curve v''g'w''h'

Wird alſo für eine der Ellipſen E die Projection ein Kreis ($\alpha . \cos \varphi = \beta$), ſo projiciren ſich auch alle übrigen als Kreiſe.

§. 351.

Aufg. Den Schnitt eines Ellipſoids durch irgend eine Ebene PQP' zu projiciren.

Fig. 134. **Aufl.** Man lege die Grundebenen parallel zu zwei

---

als Hauptſchnitt eines Ellipſoids, welches nicht durch Drehung gebildet iſt, und v''w'' als die Projection eines auf der Hauptebene ſenkrechten Schnittes E, welchem der Durchmeſſer g'h' zugeordnet iſt, ſo ſchneiden ſich zwei durch v'' und w'' an v''g'w'' gelegte Tangenten auf der Richtung von g'h' (§. 201) in S. Ein Kegel, welcher S zur Spitze und die in v''w'' projicirte Ellipſe E zur Leitenden hat, muß das Ellipſoid in dieſer Ellipſe berühren. Denn ſchneidet eine zu E parallele Ebene π das Ellipſoid in der Curve c und den Kegel in der Curve k, ſo iſt c ∽ E (§. 350, 3) und k ∽ E (§. 219), alſo c ∽ k; ferner haben die Ellipſen k und c den Mittelpunct und die Richtung einer Axe gemein; dieſe Axe iſt aber in c (wo ſie durch die Peripherie von v''g'w''. begrenzt iſt) kleiner als in k (wo ſie an die außerhalb jener Peripherie liegenden Tangenten v''S, w''S reicht); daher muß c ganz innerhalb k liegen und kann mit letzterer keinen Punct gemein haben. Da dieß für jede beliebige Lage der Ebene π gilt, ſo kann der Kegel S mit dem Ellipſoide außer der Ellipſe E keinen Punct gemein haben, oder beide Flächen berühren ſich in E. — Durch parallele Rückung der E (v''w'') kann man die Kegelſpitze S nach und nach in alle möglichen Puncte der (beiderſeits verlängerten) g'h' fallen laſſen, ſelbſt in unendliche Entfernung (wobei der Kegel in einen zu g'h' parallelen Cylinder übergeht). Alſo darf man umgekehrt ſchließen, daß jeder Kegel, welcher aus einem Puncte der g'h' dem Ellipſoid umſchrieben iſt, dieſes in einer Ellipſe berühren muß, deren Ebene zu g'h' geordnet und alſo auf der Hauptebene w''g'w'' ſenkrecht iſt, in welcher g'h' liegt.

Digitized by Google

Hauptebenen des Ellipſoids, ſo daß (mon, m′u′n′..), (mtn.., m′o′n′) Hauptſchnitte ſind. — Macht man $ov_1 = ot$, $v_1v' \perp GS$ und zieht v′o′w′, ſo ſchneidet die zur VE ſenkrechte Ebene Zz′w′ das Ellipſoid in einer Ellipſe, deren H-Projection ein Kreis vom Halbmeſſer ov_1 iſt, und die Ebene PQP′ in der Geraden (Zs,z′S′); daher ſind die Puncte a_1, b_1, wo Zs jenem Kreiſe begegnet, die H-Projectionen zweier Puncte der verlangten Schnittcurven; die zugehörigen V-Projectionen ſind a′, b′ (in v′w′). — Irgend eine zu Zz′w′ parallele Ebene ſchneidet das Ellipſoid in einer andern Ellipſe, deren V-Projection die Gerade v″w″ (|| v′w′) und deren H-Projection wieder ein Kreis iſt; den Mittelpunct c und den Halbmeſſer cv_2 dieſes Kreiſes findet man, wenn man v″w″ in c″ halbirt, $c''c \perp GS$ und $v''v_2 \perp GS$ fällt. Die H-Projection ra_2b_2 der Geraden, in welcher die Parallel-Ebene die PQP′ ſchneidet, iſt parallel mit zb_1 und alſo leicht zu erhalten; ſie ſchneidet den Kreis $a_2v_2b_2$ in zwei Puncten a_2, b_2, und dieſe gehören zwei neuen Puncten der geſuchten Schnittcurven zu, deren V-Projectionen a″, b″ in v″w″ liegen. — Auf dem angedeuteten Wege ergeben ſich beliebig viele Puncte der Curve. Dabei iſt zu beachten, daß die Mittelpuncte der parallelen Hülfsſchnitte alle auf der Geraden (mn, o′c″) liegen und alſo das Halbiren der V-Projectionen bei fernern Hülfsſchnitten erſpart wird.

(Schnitte krummer Flächen durch gebrochene.)

§. 352.

Es kann bisweilen verlangt werden, den Schnitt einer krummen und einer gebrochenen Fläche darzuſtellen. Eine ſolche Aufgabe iſt immer nach dem in dieſem Kapitel Abgehandelten lösbar. Man projicirt die Schnittcurve, welche die Ebene zweier Nachbarkanten (die Ebene eines Bruchſtückes) der gebrochenen Fläche auf der krummen Fläche hervorbringt, nimmt aber von dieſer Curve nur den zwiſchen den erwähnten Kanten enthaltenen Bogen; auf dieſe Art

verfährt man mit ſämmtlichen Bruchſtücken und erhält dadurch die vollſtändige Schnittfigur. Dieſe Figur darf jedoch nicht mit einer ſtetigen Curve verwechſelt werden; vielmehr iſt ſie eine bloße Zuſammenſetzung von einzelnen Bögen verſchiedener Curven.

Als einfache Übungsbeiſpiele können dienen: 1.) der Schnitt einer Kugelfläche durch eine prismatiſch-gebrochene Fläche; 2.) der Schnitt irgend einer Drehungsfläche mit der gebrochenen Oberfläche einer Pyramide, deren Spitze in der Drehungsaxe liegt.

Aufgaben dieſer Art laſſen ſich übrigens auch nach derſelben Methode löſen, welche im folgenden Kapitel für die Schnitte krummer Flächen durch Cylinder- und Kegelflächen gelehrt werden wird, indem prismatiſch-gebrochene Flächen wie cylindriſche und pyramidal-gebrochene wie Kegel-Flächen erzeugt werden können, wenn man der leitenden Curve ein leitendes Polygon (oder irgend eine gebrochene Linie) ſubſtituirt.

Fünftes Kapitel.

Schnitte krummer Flächen durch krumme Flächen und krumme Linien.

§. 353.

Die Schnittpuncte einer krummen Fläche und einer ebenen Curve liegen dort, wo letztere der Curve S begegnet, nach welcher ihre Ebene die Fläche ſchneidet; ſie können alſo (wenn überhaupt ſolche vorhanden ſind) durch Löſung der im vorigen Kapitel betrachteten Aufgaben gefunden werden.

Wird aber eine krumme Fläche F von einer gewundenen Curve W geſchnitten, ſo hat man zur Beſtimmung der Schnittpuncte eine der ſpätern Aufgaben aufzulöſen. Man betrachtet nämlich die Curve W als Leitende irgend einer Regelfläche R (am beſten einer Cylinder- oder Kegelfläche),

Digitized by Google

deren weitere Beſtimmungsſtücke nach der Lage und Beſchaffenheit der gegebenen Fläche F paſſend gewählt werden können, und beſtimmt den Schnitt V der Flächen R und F; die Puncte, in denen die Curven W und V zuſammentreffen, ſind die verlangten. (In vielen Fällen kann für die Fläche R ſogleich einer der projicirenden Cylinder der Curve W genommen werden).

§. 354.

Der Schnitt zweier krummer Flächen iſt in den allermeiſten Fällen eine gewundene Curve, welche in ſich geſchloſſen ſein oder in's Unendliche laufen kann, öfters auch aus mehreren getrennten Äſten beſteht.

In Bezug auf die Art des Durchſchneidens zweier krummen Flächen (oder zweier von krummen Flächen begrenzten Körper) laſſen ſich dieſelben Unterſcheidungen machen wie in §. 166 für Polyeder-Schnitte; es kann nämlich das Schneiden entweder ein Eindringen der einen Fläche in die andere, oder ein Durchdringen, oder ein gegenſeitiges Ausſchneiden ſein.

§. 355.

Zur Beſtimmung des Schnittes X irgend zweier krummen Flächen F_1, F_2 bedient man ſich eines Syſtems von Hülfsflächen, welche gegen die gegebenen in ſolchen Beziehungen ſtehen, daß ihre Schnitte mit letzteren unmittelbar angegeben werden können. Dieſe Hülfsflächen müſſen daher immer von möglichſt einfacher Natur ſein; wo es angeht, nimmt man Ebenen dafür, außerdem meiſt Kugeln, Cylinder oder Kegel. Iſt H eine ſolche (ebene oder krumme) Hülfsfläche und ſie ſchneidet die gegebenen Flächen F_1, F_2 in den Linien f_1, f_2, ſo liegen die Puncte, welche f_1 mit f_2 gemeinſchaftlich hat, auf der geſuchten Schnittcurve X; je öfter man dann die Lage der H ändert, um ſo mehr Puncte der X erhält man.

§. 356.

Für die Darſtellung der Curve X iſt die Wahl des Grundſyſtems nicht gleichgiltig, indem von der Lage deſſel-

Digitized by Google

den in vielen Fällen die Möglichkeit einfacher Hülfsſchnitte abhängt. Außer der Rückſicht auf dieſe Hülfsſchnitte ſind manchmal auch noch andere Umſtände zu beachten. Laſſen z. B. die beiden gegebenen Flächen eine gemeinſchaftliche Ebene der Symmetrie (Hauptebene) zu (welche alſo auch die Schnittcurve X ſelbſt in ſymmetriſche Hälften ſcheiden muß), ſo wird man dadurch auf eine zu dieſer Hauptebene parallele Grundebene hingewieſen, auf welcher dann die Projectionen der beiden ſymmetriſchen Hälften von X ineinanderfallen müſſen (ſo daß jeder Punct der Projection für zwei Puncte der wahren Curve gilt.

†) Wenn zwei Flächen zweiter Ordnung ſich ſchneiden und ſo gegen einander liegen, daß ſie eine gemeinſchaftliche Hauptebene haben, ſo projicirt ſich auf dieſe Hauptebene (oder auf eine mit ihr parallele Grundebene) die Schnittcurve immer als eine Linie zweiter Ordnung. (S. Anhang, IV).

§. 357.

Denkt man ſich durch einen Punct p der Curve X, nach welcher zwei krumme Flächen F_1 und F_2 ſich ſchneiden, eine Tangente an dieſelbe gezogen, ſo muß dieſe in den beiden Ebenen zugleich liegen, welche durch p berührend an F_1 und F_2 gelegt werden können, und iſt alſo die Durchſchnittslinie beider Ebenen. Man kann daher durch Conſtruction dieſer Ebenen die Tangente finden, wenn man auch außer p keinen weitern Punct der Curve X kennt.

Schnitt zweier Regelflächen.

§. 358.

Wenn zwei Regelflächen ſich ſchneiden, wählt man gewöhnlich Ebenen zu Hülfsflächen, weil eine ſchicklich gelegte Ebene wenigſtens eine der gegebenen Flächen, und in günſtigen Fällen auch wohl beide, nach geraden Linien ſchneidet.

Digitized by Google

§. 359.

Aufg. Den Schnitt zweier Cylinderflächen C und 𝔈 zu finden.

Aufl. Ein Cylinder wird durch eine zur Erzeugenden parallele Ebene nach einer oder mehreren Geraden geſchnitten. Daher muß eine Ebene, welche den Erzeugenden der beiden gegebenen Cylinderflächen zugleich parallel iſt, jede von den Flächen nach Geraden ſchneiden, und die gegenſeitigen Schnittpuncte dieſer Geraden liegen auf der geſuchten Schnittcurve.

Es ſeien VGW und 𝔙𝔊𝔚 die Leitenden (zugleich die H-Spuren) der gegebenen Flächen C und 𝔈; (Vx, v′x′) eine Mantellinie der erſten, (𝔎b_1, f′b^I) eine Mantellinie der zweiten. Legt man durch einen beliebigen Punct (x, x′) in (Vx, v′x′) eine Parallele zu (𝔎b_1, f′b^I) und beſtimmt ihre H-Spur Z, ſo iſt VZ die H-Spur einer Ebene E, welche den Erzeugenden beider Cylinderflächen parallel iſt (vgl. §. 49). Dieſe Ebene ſchneidet die Fläche C in den Mantellinien (Vx, v′x′), (Wa_4, w′a^{IV}) und die Fläche 𝔈 in (𝔙a_1, 𝔳′a^I), (𝔚a_2, 𝔴′a^{II}); daher gehören die vier Puncte (a_1, a^I), (a_2, a^{II}), (a_3, a^{III}), (a_4, a^{IV}), in denen ſich jene zwei Paare von Mantellinien begegnen, der Schnittcurve an (und man hat zugleich aus §. 7 eine Genauigkeitsprobe). Durch mehrmaliges paralleles Verrücken der H-Spur VZ𝔚 erhält man beliebig oft vier neue Puncte der Curve. Fig. 135.

Dieſes Verrücken der V𝔚 hat aber ſeine Grenzen; denn da die Ebene E, deren Spur ſie iſt, immer beiden Cylindern begegnen ſoll, ſo muß die V𝔚 auch die beiden Cylinderſpuren treffen, und ihre äußerſten Lagen ſind mithin diejenigen, von denen jede die eine Cylinderſpur berührt und die andere ſchneidet, in Fig. 135 alſo die Linien GH und 𝔎L. Die beiden Lagen der Hülfsebene E welche den Spuren GH und 𝔎L entſprechen, heißen Grenzebenen, und zwiſchen ihnen ſind alle brauchbaren Lagen der Hülfsebene eingeſchloſſen; die Linien GH und 𝔎L mögen Spurgrenzen heißen.

Aus der Lage der Spurgrenzen iſt ſogleich abzuſehen, von welcher Art der Durchſchnitt beider Cylinderflächen ſein

muß. Berühren nämlich dieſe Spurgrenzen, wie in Fig. 135, nicht eine und dieſelbe Cylinderſpur, ſo ſieht man, daß ein Stück des Cylinders C gar nicht vom andern Cylinder 𝔈 erreicht wird (nämlich das Stück, deſſen ℌ-Spur der Bogen KL iſt), und daß eben ſo auch ein Stück des Cylinders 𝔈 nicht vom erſten erreicht wird; deshalb findet zwiſchen beiden Cylindern ein gegenſeitiges Ausſchneiden ſtatt und die Schnittcurve muß aus einem einzigen geſchloſſenen Aſte beſtehen. Würden dagegen die Spurgrenzen beide die Spur VGW berühren und die Spur 𝔙𝔊𝔚 ſchneiden, ſo müßte der Cylinder C den Cylinder 𝔈 durchdringen und die Schnittcurve beſtände aus zwei getrennten Äſten. *)

Die Schnittcurve muß die durch K und L gehenden Mantellinien des Cylinders C berühren, und eben ſo die durch 𝔊 und ℌ gehenden Mantellinien des Cylinders 𝔈; denn ſie hat mit jeder ſolchen Mantellinie einen Punct gemein, und liegt übrigens ganz diesſeits derſelben. Mit der Beſtimmung dieſer Berührungspuncte (b_1, b^I), (b_2, b^{II}), (c_1, c^I), (c_2, c^{II}) wird am beſten die Zeichnung der Curve begonnen; hierauf ſucht man in jeder Grundebene diejenigen Puncte der Curvenprojection, welche auf den gleichnamigen Umriſſen der Cylinder liegen und in denen die Projection den betreffenden Umriß berühren muß (§. 299, I). Aus dieſen wenigen Puncten iſt im Allgemeinen ſchon der Lauf der Curve zu erkennen, und es läßt ſich dann leicht beurtheilen, an welchen Orten man noch weitere Puncte zu beſtimmen nöthig hat.

†) In Beziehung auf das Ausziehen der projicirten Mantellinien iſt zu bemerken, daß auch ſolche, welche auf dem an ſich ſichtbaren Theile des einen Cylinders liegen, theilweiſe unſichtbar werden können, indem der andere Cylinder Stücke derſelben verdeckt. Was für Stücke zu punctiren

---

*) Inwiefern zeigen die Spurgrenzen es ſogleich an, wenn die gegebenen Cylinder ſich gar nicht begegnen? Wie verhält es ſich, wenn eine von den Spurgrenzen beide Cylinderſpuren berührt? Wie, wenn jede Spurgrenze eine gemeinſchaftliche Tangente beider Cylinderſpuren iſt?

ſind, läßt ſich am beſten ermeſſen, wenn man vorher beſtimmt hat, welche Puncte der Schnittcurve ſichtbar und welche unſichtbar ſind. Ein Punct der Schnittcurve kann aber nur dann ſichtbar ſein, wenn von den beiden Mantellinien, durch deren Schnitt er entſtanden iſt, jede auf ihrem eigenen Cylinder (ohne Vorhandenſein des andern) ganz ſichtbar wäre; ein Punct dagegen, in welchem ſich eine ſichtbare und eine unſichtbare oder zwei unſichtbare Mantellinien ſchneiden, iſt verdeckt, weil er bezüglich des einen oder beider Cylinder auf dem unſichtbaren Theile liegt.

Zuſ. I. Hat man nur einen Punct der Schnittcurve beſtimmt, ſo kann man (nach §. 357) ſogleich für dieſen Punct die Tangente der Curve finden, ohne weiterer Puncte zu bedürfen. So iſt für den Punct (q, q′), welcher durch den Schnitt der von T und $\mathfrak{T}$ ausgehenden Mantellinien entſteht, die Tangente die Schnittlinie zweier Ebenen, welche die beiden Cylinder in den genannten Mantellinien berühren; die H-Spuren dieſer Ebenen ſind TR, $\mathfrak{T}$R, alſo R die H-Spur der Tangente, Rq ihre H-Projection, r′q′ ihre V-Projection.

Zuſ. II. Wenn, wie in Fig. 135, die Leitenden der beiden Cylinder geſchloſſene Curven ſind, kann die Schnittcurve niemals einen unendlichen Zweig haben. Denn es giebt hier immer Grenzebenen, über welche die Schnittcurve nicht hinaus kommt und innerhalb welcher ſie auch keinen unendlich fernen Punct haben kann, weil ein ſolcher das Parallelwerden zweier auf verſchiedenen Cylindern liegender Mantellinien und mithin ein Parallelſein der beiden Erzeugenden vorausſetzen würde; unter einer ſolchen Vorausſetzung aber ſchneiden ſich zwei Cylinder nicht in einer Curve, ſondern in mehreren Geraden. — Sind die Leitenden (oder die Spuren) beider Cylinder nichtgeſchloſſene Curven, ſo kann es zwar in einzelnen Fällen zwei Grenzebenen und ſomit eine geſchloſſene Schnittcurve geben; in andern Fällen aber iſt nur eine oder gar keine Grenzebene möglich, und dann hat die Schnittcurve immer unendliche Zweige. Iſt von den H-Spuren (Leitenden) der beiden Cylinder die eine geſchloſſen und die andere nicht, ſo ſind in der Regel zwei Grenzebenen möglich, und des-

Digitized by Google

halb iſt die Schnittcurve im Allgemeinen geſchloſſen, ausgenommen, wenn eine von den benützten Hülfsebenen die offene Cylinderſpur in einem unendlich fernen Puncte treffen kann (z. B. wenn die eine Cylinderſpur eine Ellipſe und die andere eine Hyperbel wäre, deren eine Aſymptote zwiſchen den Spurgrenzen und parallel mit dieſen läge).

§. 360.

Übungsaufgabe: Die in Fig. 135 dargeſtellten Cylinder zu entwickeln und auf dem entwickelten Mantel eines jeden die Verwandelte der Durchſchnittscurve zu zeichnen.

§. 361.

Aufg. **Den Schnitt zweier Kegelflächen zu projiciren.**

Aufl. Die Kegel ſeien durch ihre H-Spuren VZ,W.., MЗ,N.. und ihre Spitzen (s, s'), (t, t') gegeben.

Fig. 136. Läßt man um eine Gerade, welche die Spitzen S, T beider Kegel verbindet, eine Ebene E ſich drehen, ſo ſchneidet jede Lage dieſer Ebene ſowohl den einen als den andern Kegel nach geraden Linien (weil ſie durch die beiden Kegelſpitzen geht) und die gegenſeitigen Durchſchnitte derſelben ſind Puncte der geſuchten Schnittcurve.

Wenn E in ſolche Lage kommt, daß ſie den einen Kegel berührt und den andern ſchneidet, ſo heißt ſie eine Grenzebene. Aus den Lagen der Grenzebenen iſt (wie in §. 359) die Art des Durchſchnitts der gegebenen Flächen zu erkennen. Die H-Spuren der ſämmtlichen Lagen von E gehen durch die H-Spur R der ST..; die H-Spuren der Grenzebenen (die Spurgrenzen) erhält man alſo, wenn man durch R Gerade legt, deren jede die Spur des einen Kegels berührt und die Spur des andern ſchneidet. Sind die Spurgrenzen Tangenten einer und derſelben Kegelſpur (wie in Fig. 136), ſo iſt der Schnitt beider Kegel ein Durchdringen (und zwar dringt derjenige Kegel, deſſen Spur von den Spurgrenzen berührt wird, durch den andern), wobei die Schnittcurve aus getrennten Äſten beſteht.

Digitized by Google

Wenn von den Spurgrenzen jede eine andere Kegelſpur be-
berührt, ſo ſchneiden die Flächen ſich gegenſeitig aus.

Die in Fig. 136 dargeſtellten Kegel ſind von ſolcher Lage und Beſchaffenheit, daß ſie eine gemeinſchaftliche Hauptebene haben, und zu dieſer iſt die VE parallel gelegt. (Deshalb, und weil die Spuren der Kegel Linien zweiter Ordnung [Kreiſe] ſind, muß die V-Projection des Schnitts [nach §. 356, †] eine Linie zweiter Ordnung ſein.) Zugleich ſind die Lagen der Hülfsebenen E ſymmetriſch zu beiden Seiten der gemeinſchaftlichen Hauptebene angeordnet, wodurch von den Mantellinien, auf welche man durch ihre Schnitte kommt, je zwei immer eine gemeinſchaftliche V-Projection erhalten. — Zuerſt läßt man die Ebene E mit der Hauptebene zuſammenfallen und findet dadurch die Puncte (a^{I}, a_1), (a^{II}, a_2), (a^{III}, a_3), (a^{IV}, a_4); dann geht man ſogleich zu den Grenzebenen über, weil die in ihnen liegenden Mantellinien von der Schnittcurve berührt werden müſſen; andere Lagen der E ſchaltet man nach Bedürfniß ein. *)

In der Zeichnung der Fig. 136 ſind vorzugsweiſe nur die beiden untern Mäntel der Kegel berückſichtigt, weil durch das Hinzutreten der obern Mäntel die H-Projection völlig verdeckt worden wäre und dabei (wegen des Punctirens aller Linien) die Deutlichkeit gelitten hätte. Deshalb ſind auch die Mantellinien, welche in die Hülfsebenen E fallen, nicht über die Kegelſpitze hinauf verlängert. Um aber die vollſtändige Schnittcurve zu erhalten, müſſen nothwendig die obern Mäntel ebenfalls in Betracht gezogen und alſo die Mantellinien nach oben verlängert werden. Das Zuſammentreffen dieſer obern Mäntel giebt einen dritten Aſt der Schnitt-

*) So wie die Aufg. des §. 359 mit der des §. 170 verwandt iſt, ſo die gegenwärtige mit der des §. 169, und die nachfolgende (§. 362) mit der des §. 172. Der in der Anmerk. zu §. 169 gegebene Lehrſatz gilt noch fort, wenn man ſtatt pyramidalgebrochener Flächen Kegelflächen ſetzt und ſtatt prismatiſchgebrochener Fläche Cylinderfläche.

Digitized by Google

curve; die Anfänge für die Projectionen dieſes Aſtes ſind in $x_0 a_4 x$ und $a^{IV} x'$ angedeutet (wobei $a^{IV} x'$ eine Fortſetzung des in a^{I} unterbrochenen Hyperbelaſtes $a^{II} .. a^{I}$ iſt). *)

†) Welche Theile der Fig. 136 (die obern Kegelmäntel hinweggedacht) ausgezogen und welche punctirt werden mußten, iſt dort leicht zu beſtimmen. Bei andern Lagen der gegebenen Kegel hält man ſich an dieſelbe Regel, welche in §. 359, † für einen verwandten Fall aufgeſtellt wurde.

Zuſ. I. Eine Tangente der Schnittcurve für einen gegebenen Berührungspunct erhält man auf demſelben Wege wie in §. 359, Zuſ. I.

Zuſ. II. Man kann, ehe man noch die Zeichnung der Schnittcurve beginnt, zum Voraus unterſuchen, ob dieſe Curve unendliche Zweige habe oder nicht. Erſteres iſt nur dann möglich, wenn irgend einmal zwei in einerlei Hülfsebene E fallende und zu verſchiedenen Kegeln gehörige Mantellinien parallel werden (ſich erſt in unendlicher Entfernung ſchneiden). Zwei ſolche Mantellinien müßten aber, wenn man den einen Kegel parallel mit ſich ſelbſt bis zum Zuſammenfallen beider Spitzen verrückte, in eine einzige Linie ſich vereinigen. Denkt man ſich nun jene Rückung mit dem Kegel S wirklich vorgenommen, ſo bilden $t'p'$ ($\| s'n'$) und $t'q'$ ($\| s'm'$) den verticalen Umriß ſeiner neuen Lage; und da ſeine urſprüngliche H-Spur ein Kreis war, ſo iſt auch ſeine neue Spur ein Kreis über PQ. Dieſer Kreis ſchneidet die H-Spur des gegebenen Kegels T in den Puncten Z_1, Z_2; alſo haben die beiden Kegel, deren Spitzen in T vereinigt ſind, zwei Mantellinien TZ_1, TZ_2 gemein, und hieraus muß, dem Vorigen gemäß, geſchloſſen werden, daß die Schnittcurve der gegebenen Kegel T und S (nachdem letzterer in ſeine urſprüngliche Lage zurückgeführt worden) in's Unendliche läuft. **) — Bei der parallelen Zurückbewegung des Kegels S ſchreitet die Spitze S in der

---

*) Warum findet auf die V-Projection der Schnittcurve der in §. 299, I aufgeſtellte allgemeine Satz keine Anwendung?

**) Das Gegentheil wäre der Fall geweſen, wenn die Kreiſe über PQ und VW ſich nicht geſchnitten hätten.

Digitized by Google

Geraden RTS und die Linie TZ_1 in der Ebene TRZ_1 fort, alſo der Punct Z_1 in der Geraden RZ_1; ſchneidet daher die verlängerte RZ_1 den Kreis über MN im Puncte $\mathfrak{Z}_1$, ſo muß $s\mathfrak{Z}_1 \parallel tZ_1$ ſein und die H-Projection derjenigen Mantellinie vorſtellen, welche die TZ_1 in einem unendlich fernen Puncte ſchneidet. Auf dieſelbe Weiſe findet man die H-Projection $s\mathfrak{Z}_2$ der Linie $S\mathfrak{Z}_2$, welche der TZ_2 in unendlicher Entfernung begegnet. Wegen der Symmetrie beider Hälften jedes Kegels müſſen die Linien TZ_1 und TZ_2 eine gemeinſchaftliche V-Projection (t′z′) haben; eben ſo $S\mathfrak{Z}_1$ und $S\mathfrak{Z}_2$.

Wendet man das Verfahren, welches die Tangente eines beliebigen Punctes der Schnittcurve liefert (Zuſ. I.), auf den unendlich fernen Schnittpunct von $S\mathfrak{Z}_1$ und TZ_1 an, ſo erhält man eine Aſymptote dieſer Schnittcurve *), welche mit $S\mathfrak{Z}_1$ und TZ_1 parallel ſein muß (§. 2, V) und alſo leicht zu projiciren iſt. Ihr nähert ſich ſowohl der Zweig $(a_4 x_0 .., a^{IV} x' ..)$ als der Zweig $(a_3 y_0 .., a^{III} y' ..)$ ohne Ende, und ihre Projectionen ſind Aſymptoten für die gleichnamigen Projectionen dieſer Zweige. Eine zweite Aſymptote, welche mit der erſten die V-Projection gemein haben muß und den Zweigen $(a_4 x .., a^{IV} x')$, $(a_3 y .., a^{III} y' ..)$ zugehört, entſpricht dem unendlich fernen Schnittpuncte der TZ_2 und $S\mathfrak{Z}_2$. Beide Aſymptoten ſchneiden ſich in der gemeinſamen Hauptebene der Kegel. **)

§. 362.

Aufg. Den Schnitt einer Cylinderfläche und einer Kegelfläche zu projiciren.

Aufl. Die hier anzuwendenden Hülfsebenen werden durch die Spitze des Kegels parallel zur Erzeugenden des Cylinders gelegt und gehen demnach alle durch die Gerade,

*) Gegenwärtiges Beiſpiel mag überhaupt zeigen, wie auch bei gewundenen Curven Aſymptoten vorkommen können, nachdem bisher nur Aſymptoten ebener Curven erwähnt worden ſind.

**) Wann hat die Schnittcurve unendliche Zweige ohne Aſymptoten?

Digitized by Google

welche man durch die Kegelſpitze parallel zur Erzeugenden des Cylinders ziehen kann. Jede ſolche Ebene ſchneidet ſowohl den Kegel als den Cylinder nach **Geraden**. Im Übrigen wird die Aufgabe faſt ganz ſo behandelt, wie die in §. 359 und §. 361.

§. 363.

Übungsaufgaben.

Man ſuche den Durchſchnitt

1.) einer Cylinderfläche und eines hyperboliſchen Paraboloids, deſſen Richtebene parallel zur Erzeugenden des Cylinders iſt;

2.) zweier hyperboliſcher Paraboloide mit gemeinſchaftlicher Richtebene;

3.) eines Kugel-Conoids und des in §. 262 (1) beſchriebenen Conoids, wenn beide einerlei Richtebene haben;

4.) einer (windſchiefen) Schraubenfläche und einer Kegelfläche, deren Spitze in der Axe der erſtern liegt.

Schnitt einer Drehungsfläche und einer Kegelfläche.

§. 364.

Die Hülfsflächen, mittels deren man den Schnitt zwiſchen einer Drehungsfläche und einer Kegelfläche zu erhalten ſucht, ſind entweder Ebenen, oder Kegel, oder Cylinder.

Wo man Ebenen benützt, wählt man dieſe meiſt ſo, daß ſie entweder die Drehungsfläche (bei verticaler Stellung ihrer Axe) nach **Parallelkreiſen** ſchneiden *), oder die Kegelfläche nach **Geraden** **). In beſondern Fällen läßt ſich Beides durch ein und daſſelbe Ebenenſyſtem erreichen; nämlich dann, wenn die ſämmtlichen Mantellinien der Kegelfläche mit einer Ebene parallel ſind, welche ſenkrecht zur Axe der Drehungsfläche liegt ***). In andern Fällen wird man

*) Ein Beiſpiel in §. 371, 5.

**) Beiſpiel in §. 370, Zuſ.

***) Beiſpiele in §. 371, 1—3.

Digitized by Google

durch die Natur und gegenſeitige Lage der gegebenen Flächen auf Hülfsebenen verwieſen, welche die Regelfläche nach Geraden und die Drehungsfläche nach Meridianen ſchneiden. *)

Wie und in welchen Fällen man ſich der Kegel oder Cylinder als Hülfsflächen bedient, wird ſpäter (§§. 369. 370) an Beiſpielen gezeigt werden.

§. 365.

Aufg. Man verlangt den Schnitt einer Drehungsfläche und einer Kegelfläche, welche ihre Spitze in der Drehungsaxe hat.

Aufl. Die HE lege man ſenkrecht zur Axe (s, o′s′) der Drehungsfläche, deren Hauptmeridian (mn, m′o′n′..) ſein ſoll; ferner ſei PUVW die H-Spur und (s, s′) die Spitze der Kegelfläche. Die Drehungsfläche iſt hier eine vollkommen geſchloſſene und die Kegelſpitze liegt innerhalb derſelben; deshalb kommt jeder Mantel des Kegels mit der Drehungsfläche zum Durchſchnitt. Vorläufig aber ſoll, um eine überſichtliche Zeichnung zu erhalten, der obere Mantel des Kegels weggelaſſen und von der Drehungsfläche auch nur dasjenige Stück als vorhanden gedacht werden, welches vom untern Kegelmantel getroffen wird; der Parallelkreis (mln, m′n′) möge die Grenze dieſes Stückes ſein. Fig. 137.

In die Ebene des Hauptmeridians fallen zwei Mantellinien (Vs, v′s′), (Ws, w′s′) des Kegels; die Puncte (a′, a), (b′, b), welche dieſe mit dem Hauptmeridian gemein haben, gehören zur geſuchten Schnittcurve, und in a′, b′ berührt die V-Projection dieſer Curve den verticalen Umriß der Drehungsfläche. Um den Punct der Curve zu erhalten, deſſen V-Projection auf der Linie u′s′ des verticalen Kegelumriſſes liegt, drehe man die der Mantellinie US entſprechende h-projicirende Ebene, welche zugleich eine Meridianebene der Drehungsfläche iſt, bis zum Zuſammenfallen mit der Hauptmeridianebene; dadurch kommt die Mantellinie in die Lage (U_os, u°s′) und ſchneidet den Hauptmeridian in einem Puncte,

*) Beiſpiele in §. 365 und §. 371, 3. 4.

deſſen V-Projection c° iſt; bei Zurückbewegung des Meridians in ſeine erſte Stellung rückt dieſer Punct nach (c′, c), wo er der geſuchten Curve angehört. Durch das nämliche Verfahren findet man nicht nur den Punct (d′, d), deſſen V-Projection auf die zweite Linie r′s′ des verticalen Kegelumriſſes fällt, ſondern überhaupt beliebig viele Puncte der Schnittcurve. Dabei dient es zur Abkürzung der Conſtruction, wenn man die Mantellinien des Kegels immer paarweiſe zuſammennimmt, nämlich je zwei ſolche, deren H-Spuren gleiche Entfernung von s haben, wie SP und SQ; denn man ſieht leicht, daß dieſe beiden nach vorgenommener Drehung der durch ſie gehenden Meridianebenen einerlei V-Projection erhalten.

Wäre ſtatt eines Stücks der Drehungsfläche die ganze Fläche beibehalten worden, ſo hätte man die H-Projection der Schnittcurve und die Stücke sa, sc, ... der h-projicirten Mantellinien punctiren müſſen. Will man ferner die Schnittfigur vollſtändig haben, ſo ſind, nachdem der Hauptmeridian ganz angegeben worden iſt, die einzelnen Mantellinien des Kegels über die Spitze hinauf zu verlängern, und eben ſo die V-Projectionen ihrer gedrehten Lagen; dadurch ergiebt ſich ein zweiter Curvenaſt.

Zuſ. Die V-Projection der Schnittcurve hat in Fig. 137 einen Doppelpunct f′. Soll zum Voraus unterſucht werden, ob ein ſolcher Doppelpunct überhaupt vorkommt, und wo er liegt, ſo bemerke man, daß sf′ die gemeinſchaftliche V-Projection zweier Mantellinien iſt, deren H-Spuren G, H alſo in einer zum Grundſchnitt ſenkrechten Sehne der Kegelſpur PUVW liegen, und daß zugleich dieſe Puncte G, H gleichweit von s abſtehen, weil die beiden in f′ projicirten Puncte auf einerlei Parallelkreis liegen und mithin die gedrehten Lagen der Mantellinien SG, SH einerlei V-Projection (s′g°) haben müſſen. Der Halbirungspunct x der Sehne GH muß demnach auf VW liegen; ein zweiter geometriſcher Ort desſelben ergiebt ſich im Allgemeinen, wenn man durch die Mitten mehrerer auf dem Grundſchnitt ſenk-

Digitized by Google

rechten Sehnen der Curve PUVW eine ſtetige Curve Y führt. Schneiden Y und VW ſich in x, ſo führt x auf die Puncte G, H und alſo auch auf den Punct f′; ſchneiden ſie ſich nicht, ſo hat die Curve a′c′b′d′ keinen Doppelpunct. In Fig. 137 aber iſt die Kegelſpur PUVW eine Ellipſe; daher geht hier die Y in eine gerade Linie über, und zwar in den Durchmeſſer UR, welcher die Berührungspuncte der auf dem Grundſchnitte ſenkrechten Tangenten Uu′, Rr′ verbindet (§. 201).

§. 366.

In Fig. 137 wurde für die gegebene Drehungsfläche eine Kugel angenommen und die Kegelſpitze in den Mittelpunct der Kugelfläche verlegt. Dadurch erhält die vorige Aufgabe noch eine beſondere Bedeutung, indem ihre Auflöſung zur Entwickelung einer beliebig gegebenen Kegelfläche gebraucht wird (vgl. §. 344).

Soll nämlich der in Fig. 137 gegebene Kegel entwickelt werden, ſo weiß man zum Voraus, daß die Verwandelte der Curve, nach welcher er von jener Kugel geſchnitten wird, ein Kreis ſein muß, deſſen Halbmeſſer mit dem Kugelhalbmeſſer übereinſtimmt; denn alle Puncte der Schnittcurve ſind gleichweit von der Kegelſpitze (vom Kugelmittelpunct) entfernt und behalten dieſe Entfernungen während der Entwickelung des Kegelmantels bei. Wenn man daher auf dieſem Kreiſe die Puncte angeben kann, welche beſtimmten Puncten der urſprünglichen Schnittcurve entſprechen, ſo kann man beſtimmte Mantellinien in die Entwickelung übertragen und auf ihnen die Puncte irgend einer zweiten auf dem Kegel liegenden Curve finden, mithin deren Verwandelte zeichnen. Um ein Beiſpiel zu geben, ſoll auf der Entwickelung des vorliegenden Kegels die Verwandelte der H-Spur PUVW geſucht werden.

Man beſchreibe mit dem Halbmeſſer s′m′ einen Kreis 𝔄𝔖𝔅.. und betrachte den (verlängerten) Radius 𝔖𝔄 als die Lage der Mantellinie (sV, s′v′) nach erfolgter Entwickelung; dabei fällt der Punct V nach 𝔅, ſo daß 𝔖𝔚 = (sV, s′v′) = s′v′.

Die Lagen, welche in der Entwickelung den Mantellinien (sc, s′c′), (se, s′e′),... entſprechen, laſſen ſich nur dadurch finden, daß man von A aus auf dem Kreiſe ACEB.. Bögen AC, CE,... abträgt, welche gleiche Länge mit den Bögen (ac, a′c′), (ce, c′e′),... der Schnittcurve haben. Da aber dieſe Curve gewunden iſt, ſo kann eine Aufhebung oder Änderung ihrer Krümmung erſt dann vorgenommen werden, wenn man zuvor die Windung aufgehoben, d. h. ſie (ohne Änderung ihrer Länge) in eine ebene Curve verwandelt hat, und dieß iſt durch Entwickelung eines ihrer projicirenden Cylinder zu erreichen. Die Entwickelung des h-projicirenden Cylinders und die Zeichnung der verwandelten Schnittcurve wird wie in §. 342 ausgeführt (denn daß dort eine ebene und hier eine gewundene Curve zu verwandeln iſt, macht im Verfahren ſelbſt keinen Unterſchied); man erhält dadurch als Verwandelte der (acbd, a′c′b′d′) die Curve A′C′E′..A'_0. Entſpricht nun C′ dem Puncte (c, c′), ſo daß arc. A′C′ = arc. (ac, a′c′), ſo mache man arc. AC = arc. A′C′, ziehe SC.. und trage auf ihr die wahre Länge von (sU, s′u′) ab, d. i. mache SU = s′u°; dann iſt U der Punct, welcher auf dem entwickelten Kegel dem urſprünglichen Puncte U entſpricht. Macht man arc. CE = arc. C′E′ und SET = s′t°, ſo iſt T die Lage von T in der Entwickelung; u. ſ. f. Hat man auf dieſe Art hinlänglich viele Puncte der Spur VUTG..V in der entwickelten Mantelfläche aufgeſucht, ſo läßt ſich durch ihre ſtetige Verbindung die Verwandelte VUTG..V_0 jener Spur zeichnen. *)

---

*) Die Kugel, welche für die Entwickelung irgend eines Kegels benützt wird, ſpielt hier ganz dieſelbe Rolle, wie die Ebene E, welche in §. 343 bei der Entwickelung irgend eines Cylinders zu Hülfe genommen wurde. Sowohl jene Kugel als dieſe Ebene ſind Flächen, welche die ſämmtlichen Mantellinien der zu entwickelnden Fläche ſenkrecht ſchneiden. (Auch geht die Kugelfläche in eine Ebene über, wenn man den Kegel durch unendliches Fortrücken ſeiner Spitze in einen Cylinder übergehen läßt).

§. 367.

Die H-Spur des gegebenen Kegels iſt in Fig. 137 eine Ellipſe, und alſo der Kegel ſelbſt von der zweiten Ordnung (§. 236, 1). Der Schnitt eines ſolchen Kegels durch eine um ſeine Spitze beſchriebene Kugel wird ein ſphäriſcher Kegelſchnitt im engern Sinne genannt, und ſeine wichtigſten Eigenſchaften ſind denen der ebenen Kegelſchnitte (Linien zweiter Ordnung) analog. Jeder einzelne Aſt eines ſphäriſchen Kegelſchnitts iſt der geometriſche Ort eines Punctes auf der Kugelfläche, deſſen ſphäriſche (d. h. in Bögen größter Kreiſe gemeſſene) Entfernungen von zwei feſten Puncten der Kugel eine conſtante Summe haben; die beiden Äſte zuſammen bilden den geometriſchen Ort eines Punctes, deſſen ſphäriſche Entfernungen von zwei feſten Puncten eine conſtante Differenz haben. (S. Anhang, V.)

§. 368.

Aufg. Eine Kugel wird von einem Kegel durchdrungen, deſſen Leitende ein Kreis auf der Kugel ſelbſt iſt und alſo ſchon einen Aſt der Durchſchnittsfigur vorſtellt; man verlangt den zweiten Aſt.

Aufl. Man könnte dieſe Aufgabe gleich der in §. 365 behandeln (indem man den nach der Kegelſpitze gerichteten Durchmeſſer als Drehungsaxe der Kugel betrachtet) oder auch wie die Aufgabe in §. 369. Es iſt aber eine weit einfachere Löſung möglich, wenn man weiß, daß der zweite Aſt der Schnittfigur ebenfalls ein Kreis iſt. Um dieſen Satz zu beweiſen, iſt hier ein auf die ebenen Schnitte eines Kegels bezüglicher Lehrſatz nachzuholen.

a.) Wenn ein ſchiefer Kreiskegel durch eine Ebene geſchnitten wird, welche der Ebene des Grundkreiſes antiparallel iſt, ſo iſt der Schnitt ein Kreis.

Digitized by Google

Fig. 138. Unter einer antiparallelen Ebene verſteht man eine ſolche, welche ſenkrecht auf der Hauptebene *) A′S′B′ des Kegels ſteht und gegen die Mantellinie A′S′ denſelben Winkel bildet wie die Linie S′B′ gegen die Ebene des Grundkreiſes. Eine Ebene dieſer Art ſchneide die (als VE angenommene) Hauptebene nach der Geraden $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ und den Kegel nach der Curve X. Legt man durch einen beliebigen Punct P der X eine Ebene parallel zum Grundkreiſe A′..B′, ſo ſchneidet dieſe den Kegel nach einem Kreiſe (§. 219) vom Durchmeſſer $\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'$ (|| A′B′) und die Ebene des antiparallelen Schnittes X nach einer in p projicirten Geraden, von welcher das Stück Pp die Hälfte einer dem Kreiſe $\mathfrak{C}'..\mathfrak{D}'$ und der Schnittcurve X gemeinſchaftlichen Sehne abgiebt. Nun iſt (im Kreiſe $\mathfrak{C}'..\mathfrak{D}'$)

$$Pp^2 = \mathfrak{C}'p \cdot p\mathfrak{D}';$$

ferner (wegen $\angle S'\mathfrak{A}'\mathfrak{B}' = \angle S'A'B' = \angle S'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'$)

$$\triangle \mathfrak{B}'\mathfrak{C}'p \sim \triangle \mathfrak{D}'\mathfrak{A}'p$$
$$\mathfrak{A}'p : p\mathfrak{D}' = \mathfrak{C}'p : p\mathfrak{B}'$$
$$\mathfrak{A}'p \cdot p\mathfrak{B}' = \mathfrak{C}'p \cdot p\mathfrak{D}'$$
$$= Pp^2$$

woraus folgt, daß die Curve X ein **Kreis** ſein muß.

β.) In Betreff der vorliegenden Aufgabe nehme man wieder die Hauptebene des gegebenen Kegels zur VE. Die Hauptebene muß (da ſie ſenkrecht zur Ebene eines Kugelkreiſes durch den Mittelpunct dieſes Kreiſes geführt iſt) durch den Mittelpunct der gegebenen Kugel gehen. Sie ſchneidet die Kugel nach dem größten Kreiſe $A'B'\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ und den Kegel nach den Geraden S′A′, S′B′; A′B′ iſt die V-Projection (und der Durchmeſſer) des Kreiſes, welcher dem Kegel zur Leitenden dienen ſoll. Zieht man $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$, ſo iſt (nach einer bekannten Eigenſchaft des Kreiſes) $\angle S'\mathfrak{A}'\mathfrak{B}' = \angle S'A'B'$. Eine durch $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ ſenkrecht zur VE (Hauptebene) gelegte Ebene iſt alſo der Ebene des Kreiſes A′..B′ **antiparallel** und

*) Die Hauptebene geht durch die Kegelſpitze und den Mittelpunct des Grundkreiſes und iſt ſenkrecht auf der Ebene des Grundkreiſes.

Digitized by Google

ſchneidet den gegebenen Kegel nach einem Kreiſe (α) vom Durchmeſſer 𝔄′𝔅′. Die nämliche Ebene ſchneidet aber auch die Kugel nach einem Kreiſe über dem Durchmeſſer 𝔄′𝔅′, d. i. nach demſelben Kreiſe, in welchem der Kegel geſchnitten wurde; folglich iſt dieſer Kreis den beiden gegebenen Flächen gemeinſchaftlich oder der Schnitt beider.

Die elliptiſche H-Projection des Kreiſes 𝔄′..𝔅′ hat zur einen Halbaxe die Linie ab; die andere (mn) iſt $= \frac{1}{2}$ 𝔄′𝔅′ (vgl. §. 200).

In Fig. 138 iſt die Kegelſpitze S außerhalb der Kugel angenommen. Liegt ſie innerhalb, etwa in S′, ſo iſt ∠ S′𝔅′𝔄′ = ∠ S′A′B′ und der Gang des obigen Beweiſes bleibt ungeändert.

Zuſ. I. Da für den Kreis A′B′ jeder beliebige Kugelkreis gewählt werden und auch die Kegelſpitze ganz beliebig (und unabhängig von jenem Kreiſe) angenommen werden kann, ohne daß der in (β) bewieſene Lehrſatz ſeine Geltung verliert, ſo ſieht man, daß zwiſchen den beiden Kugelkreiſen A′B′ und 𝔄′𝔅′ keine beſtimmte Beziehung ſtatt findet, und daß man alſo durch je zwei beliebige Kreiſe einer Kugel immer zwei Kreiskegel legen kann, deren Spitzen in die durch den Kugelmittelpunct ſenkrecht zu beiden Kreiſen geführte Ebene fallen.

Schneiden ſich die beiden Kreiſe, ſo liegen die Spitzen beider Kegel außerhalb der Kugel; erreichen ſie ſich nicht, ſo liegt die eine Spitze außerhalb, die andere innerhalb; berühren ſie ſich, ſo liegt eine Spitze außerhalb und für die andere müßte der Berührungspunct beider Kreiſe gelten, wobei aber der zugehörige Kegel in zwei Ebenen übergeht.

Sind die Ebenen beider Kreiſe parallel, ſo werden die beiden Kegel gerade (Drehungskegel).

Haben beide Kreiſe gleiche Durchmeſſer, ſo geht einer der Kegel in einen Cylinder über. Sind dabei die beiden Kreiſe zugleich größte, ſo verwandeln ſich beide Kegel in Cylinder.

Zuſ. II. Die letzte Bemerkung deutet auf einen zweiten Satz, der mit dem unter (β) bewieſenen nahe verwandt iſt und ſich ebenfalls leicht beweiſen läßt; nämlich: durchdringt ein Cylinder eine Kugel ſo, daß der eine Aſt der Durchſchnittsfigur ein Kreis iſt, ſo iſt auch der andere Aſt ein Kreis und zwar vom nämlichen Durchmeſſer wie der erſte.

§. 369.

Fig. 139. Aufg. Man ſucht den Schnitt einer Drehungsfläche und einer Kegelfläche, deren Spitze nicht in der Drehungsaxe liegt.

Aufl. Bei verticaler Stellung der Drehungsaxe (o, o′o″) ſei (vw, v′o″w′..) der Hauptmeridian der Drehungsfläche, PQRT die H-Spur des Kegels, (s, s′) ſeine Spitze.

Um diejenigen Puncte der verlangten Schnittcurve zu finden, welche auf einen beliebig gewählten Parallelkreis (m′n′, man) fallen, nehme man dieſen Kreis zur Leitenden eines Hülfskegels, welcher mit dem gegebenen die Spitze (s, s′) gemein hat und letzteren alſo nach Geraden ſchneiden muß. Der verticale Umriß des Hülfskegels beſteht aus den Geraden s′m′k′, s′n′l′; ſeine H-Spur iſt ein Kreis vom Durchmeſſer k′l′, welcher als Mittelpunct die H-Spur Z der von (s, s′) nach dem Mittelpuncte (o, o′) des Parallelkreiſes gezogenen Geraden (so, s′o′) hat. Beide Kegelſpuren ſchneiden ſich in P und Q; daher gehören die Mantellinien (Ps, p′s′), (Qs, q′s′) den beiden Kegeln gemeinſchaftlich zu, und die Puncte (a, a′), (b, b′), wo dieſe Mantellinien dem Parallelkreiſe MN begegnen, liegen zugleich auf der gegebenen Drehungsfläche, mithin auf der verlangten Schnittcurve.

Indem man nach und nach den Parallelkreis MN in andere Lagen bringt, ergeben ſich auf die vorbeſchriebene Weiſe beliebig viele Puncte der Schnittcurve.

†) Die obige Auflöſung iſt ganz allgemein. Iſt aber die H-Spur des gegebenen Kegels ein Kreis, ſo werden die Hülfskegel entbehrlich und können durch Hülfsebenen erſetzt

Digitized by Google

werden, welche zur HE parallel liegen. Eine ſolche Ebene ſchneidet nämlich die Drehungsfläche nach einem Parallelkreiſe und den gegebenen Kegel ebenfalls nach einem Kreiſe, der ſich auf die HE leicht projiciren läßt; die gemeinſamen Puncte beider Kreiſe ſind Puncte der geſuchten Schnittcurve.

§. 370.

Aufg. Den Schnitt einer Drehungsfläche und einer Cylinderfläche zu projiciren, deren Erzeugende zur Drehungsaxe nicht parallel iſt.

Aufl. Man betrachte einen beliebigen Parallelkreis MN der Drehungsfläche als Leitende eines Hülfscylinders, deſſen Erzeugende parallel mit der Erzeugenden des gegebenen Cylinders läuft. Dieſer Hülfscylinder ſchneidet den gegebenen nach Geraden, deren Schnittpuncte mit dem Parallelkreiſe MN der geſuchten Schnittcurve angehören, ſo daß ſich die gegenwärtige Aufgabe ganz ähnlich wie die vorige behandeln läßt.

†) Iſt die H-Spur des gegebenen Cylinders (auf einer zur Drehungsaxe ſenkrechten HE) ein Kreis, ſo hat man die Hülfscylinder nicht nöthig. (Vgl. §. 369, †.)

††) Hat die Erzeugende des gegebenen Cylinders eine zur Drehunsaxe ſenkrechte Richtung, ſo gehen die Hülfscylinder in Hülfsebenen über.

Zuſ. Wäre die gegebene Drehungsfläche ein Ellipſoid *), ſo wäre noch eine zweite einfache Auflöſung möglich. Man kann nämlich dann ein Syſtem von Hülfsebenen parallel zur Erzeugenden des Cylinders annehmen und das Grundſyſtem ſo wählen, daß die elliptiſchen Schnitte der Drehungsfläche und der Hülfsebenen ſich auf die eine Grundebene als Kreiſe projiciren. (Vgl. §. 350.)

---

*) (oder überhaupt eine Fläche zweiter Ordnung, welche nach Ellipſen geſchnitten werden kann).

Digitized by Google

§. 371.

Übungsaufgaben.

Es ſchneiden ſich
1.) ein hyperboliſches Paraboloid und eine Kugel;
2.) das in §. 262, 1 beſchriebene ſenkrechte Conoid und ein Wulſt, für welchen die gerade Leitende des Conoids die Drehungsaxe iſt;
3.) ein Drehungs-Hyperboloid und eine Wendelfläche (§. 266), deren Axe in die Drehungsaxe fällt;
4.) irgend eine Drehungsfläche und eine Cylinderfläche, deren Erzeugende parallel zur Drehungsaxe iſt;
5.) eine entwickelbare Schraubenfläche und ein Drehungs-Paraboloid, deſſen Axe mit der Axe der Schraubenfläche parallel liegt. *)

Schnitt zweier Drehungsflächen.

§. 372.

A.) Haben die beiden gegebenen Drehungsflächen die **Axe gemeinſchaftlich**, ſo können ſie ſich nur nach **Parallelkreiſen** ſchneiden; denn eine zur Drehungsaxe ſenkrechte Hülfsebene ſchneidet beide Flächen nach concentriſchen

*) Die zu den Axen ſenkrechten Hülfsebenen (von denen man eine als HE nimmt) ſchneiden die Drehungsfläche nach Parallelkreiſen und die Schraubenfläche nach Kreisevolventen, deren H-Projectionen unter ſich congruent ſind, aber aus verſchiedenen Kreispuncten entſpringen. Man reicht mit der Zeichnung **einer** ſolchen Evolvente aus, nämlich mit der Flächenſpur, wenn man jede Hülfsebene mit dem in ihr liegenden Parallelkreis in ſich ſelbſt um den Punct dreht, wo ihr die Axe der Schraubenfläche begegnet, und zwar ſo lange, bis die H-Projection der entſprechenden Schnitt-Evolvente mit der Spur der Schraubenfläche zuſammenfällt; die erhaltenen gemeinſamen Puncte des Parallelkreiſes und der Evolvente laſſen ſich dann durch Rückdrehung leicht an ihren wahren Ort verſetzen.

Digitized by Google

Kreiſen, welche alſo, wenn ſie nicht ganz ineinander fallen, gar keinen Punct gemein haben.

§. 373.

B.) Sind die Axen zweier Drehungsflächen parallel, ſo iſt ihr Schnitt leicht zu projiciren, da ein und daſſelbe Hülfsebenenſyſtem beide Flächen nach Parallelkreiſen ſchneidet.

§. 374.

C.) Wenn die Axen der gegebenen Flächen ſich ſchneiden, ſo wendet man zur Auffindung der Durchſchnittscurve ſphäriſche Hülfsflächen an. Es ſchneidet nämlich eine Kugel, deren Mittelpunct in der Axe einer Drehungsfläche liegt, die letztere Fläche nach einem Parallelkreiſe (§. 372); wählt man alſo für den Kugelmittelpunct den Punct, wo die Axen zweier Drehungsflächen ſich begegnen, ſo wird jede von beiden Flächen nach einem Parallelkreiſe geſchnitten, und die gemeinſchaftlichen Puncte der zwei Parallelkreiſe liegen auf der Schnitteurve der gegebenen Flächen. Zu leichterer Beſtimmung ſolcher Puncte legt man die HE ſenkrecht zu der einen Drehungsaxe und die VE parallel zu beiden Axen.

Beiſpiel.

Es ſeien (bei der vorhin angedeuteten Lage des Grundſyſtems) (o, o′o″) und (oX, o″x′) die Drehungsaxen, u′v′t′ und g′k′h′ die verticalen Umriſſe zweier Drehungsflächen. Fig. 140.
Ein Kreis m′k′n′l′, um o″ mit beliebigem Halbmeſſer beſchrieben, ſtellt den verticalen Umriß einer Kugel vom nämlichen Halbmeſſer vor, welche ihren Mittelpunct im Schnitte (o, o″) beider Axen hat, und die gegebenen Flächen nach Parallelkreiſen ſchneidet, deren V-Projectionen die Geraden m′n′, k′l′ ſind; daher iſt a′ die gemeinſchaftliche V-Projection zweier Puncte der Curve, in welcher ſich die Drehungsflächen ſchneiden; die zugehörigen H-Projectionen a_1, a_2

findet man, nachdem die H-Projection $ma_1n..$ des horizontalliegenden Parallelkreiſes MN gezeichnet worden iſt.

Um für die Schnittcurve andere Paare von Puncten zu erhalten, giebt man der Hülfskugel andere Halbmeſſer. *)

†) Zur Beſtimmung der Tangente für einen beliebigen Punct (a_2, a') der Schnittcurve zeigen ſich zwei Wege, von denen zuerſt der in §. 357 angedeutete betreten werden ſoll. Zur Unterſcheidung der beiden gegebenen Drehungsflächen heiße diejenige, deren Axe vertical ſteht, die erſte.

Die H-Spur PQ der Ebene, welche die erſte Drehungsfläche im Puncte (a_2, a') berührt, wird nach §. 274, I gefunden. Die Berührungsebene der zweiten Drehungsfläche für den nämlichen Punct ſteht ſenkrecht auf der in (a_2, a') errichteten Normalen der Fläche; ihre H-Spur RQ ergiebt ſich alſo nach §. 51, wenn man vorher dieſe Normale $(c'a', ca_2)$ beſtimmt hat, was wie in §. 274, III geſchieht. Die H-Spur der geſuchten Tangente iſt Q, daher $(Qa_2, q'a')$ die Tangente ſelbſt.

Ein anderer Weg wird durch die Bemerkung eröffnet, daß eine Ebene ε, durch die von (a_2, a') ausgehenden Normalen beider Flächen geführt, auf den vorhin benützten Berührungsebenen (§. 2, XI) und alſo auch auf der geſuchten Tangente (§. 2, XII) ſenkrecht ſteht. **) Beſtimmt man dieſe Normalen $(c'a', ca_2)$, $(d'a', oa_2)$ und die Spuren der durch ſie gehenden Ebene ε, ſo erhält man die Projectionen

---

*) Die Ebene beider Drehungsaxen iſt immer eine gemeinſchaftliche Hauptebene der gegebenen Flächen. Da nun die in Fig. 140 gewählten Flächen von der zweiten Ordnung ſind, ſo liefert dieſe Figur ein Beiſpiel für den in §. 356, † angeführten Satz. (Hat ein um o'' beſchriebener Kreis mit den beiden verticalen Flächenumriſſen zwei Sehnen gemein, welche ſich erſt in ihren Verlängerungen ſchneiden, ſo liegt der Schnittpunct auf der Fortſetzung der krummen Linie, welche man als V-Projection des Flächenſchnittes fand, aber er iſt nicht mehr Projection für einen Punct dieſes Schnittes.)

**) Demnach iſt ε eine Normalebene der Schnittcurve.

a, Q, a′q′ der Tangente nach §. 50. In Fig. 140 iſt nur die H-Spur EF der Ebene ε gezeichnet; die V-Spur wurde (zur Raumerſparniß und zugleich zur Vereinfachung der Conſtruction) durch die Linie (c′d′, co) erſetzt, in welcher die ε und die Ebene beider Drehungsaxen ſich ſchneiden. Dieſe Linie iſt nämlich der V-Spur parallel (§. 2, XVII) und auf ihrer V-Projection c′d′ muß alſo die V-Projection a′q′ der Tangente ſenkrecht ſtehen.

§. 375.

D.) Liegen die Axen der gegebenen Drehungsflächen nicht in einerlei Ebene, ſo legt man in der Regel wieder die HE ſenkrecht zur einen Axe und die VE parallel zu beiden, und bedient ſich einer Reihe horizontaler Hülfsebenen. Eine ſolche Hülfsebene ſchneidet aber nur die eine Fläche nach einem Kreiſe; die andere Fläche wird nach einer Curve C geſchnitten, deren Puncte man einzeln conſtruiren muß, weshalb hier die Zeichnung weniger einfach ausfällt als in den vorigen Fällen. *)

Doch kann unter beſondern Umſtänden ein anderes Syſtem von Hülfsebenen größere Vortheile gewähren, wie das folgende Beiſpiel zeigen mag.

---

*) Um den Schnitt C einer horizontalen Ebene H und einer Drehungsfläche zu projiciren, deren Axe parallel zur VE, aber geneigt gegen die HE iſt, nimmt man zu Hülfsſchnitten Parallelkreiſe. Die V-Projection eines ſolchen Parallelkreiſes iſt eine Gerade, welche zugleich die Länge ſeines Durchmeſſers angiebt; die elliptiſche H-Projection braucht man nicht zu zeichnen; vielmehr projicirt man die (zur VE ſenkrechte) Sehne des Parallelkreiſes, welche in die Ebene H fällt und durch die h-projicirende Ebene der Drehungsaxe ſenkrecht halbirt wird; die Länge der Sehne findet man, wenn man den Parallelkreis in die ebengenannte h-projicirende Ebene umklappt. Die Endpuncte der Sehne gehören der Curve C an.

§. 376.

Aufg. Den Schnitt zweier Drehungs-Ellipſoide, deren Axen nicht in einerlei Ebene liegen, zu projiciren.

Aufl. Man lege die VE parallel zu beiden Drehungsaxen, ſo daß u′o′.. und r′ω′.. ihre V-Projectionen, v′u′w′.. und s′r′t′.. die V-Projectionen der Hauptmeridiane, und o′v′, ω′s′ die V-Projectionen der zweiten Meridian-Halbaxen ſind. Kennt man außerdem noch den kürzeſten Abſtand δ der beiden Drehungsaxen, ſo ſind die beiden Flächen und ihre gegenſeitige Lage völlig gegeben. Die vortheilhafteſte Wahl der HE wird ſich aus nachfolgender Betrachtung ergeben.

Das Ellipſoid, deſſen Meridian in v′u′w′.. projicirt iſt, heiße das erſte, und das vom Meridian SRT.. das zweite. Man lege durch den Mittelpunct O des erſten eine Parallele zur Drehungsaxe des zweiten und laſſe dieſe Parallele als Drehungsaxe eines dritten Ellipſoids gelten, deſſen Meridian dem Meridian des zweiten ähnlich iſt und deſſen Äquator mit dem Äquator des erſten einerlei Halbmeſſer hat. Die V-Projection für den Hauptmeridian dieſes dritten Ellipſoids erhält man, wenn man r′o′.. || r′ω′ und o′ɜ′ ⊥ o′r′ zieht, o′ɜ′ = o′v′ macht, die Länge o′r′ aus der Proportion o′r′ : o′ɜ′ = ω′r′ : ω′s′ ſucht und über den Halbaxen o′r′, o′ɜ′ eine Ellipſe m′r′n′ɜ′ conſtruirt. Dieſe Ellipſe und die Ellipſe v′u′w′.. ſchneiden ſich in vier Puncten, welche paarweiſe in gerader Linie mit o′ liegen; denn zieht man m′o′ und macht (auf ihrer Verlängerung) o′n′ = o′m′, ſo muß der Punct n′ auf die Peripherien beider Ellipſen zugleich fallen, indem m′o′ die Hälfte eines den beiden Ellipſen gemeinſchaftlichen Durchmeſſers iſt; eben ſo iſt k′o′l′ ein zweiter gemeinſchaftlicher Durchmeſſer. Demnach haben auch die wirklichen Meridiane VUW.. und ƷRK.. zwei Durchmeſſer MN und KL gemeinſchaftlich. Da ferner das erſte und dritte Ellipſoid auch den in v′ projicirten Äquator-Halbmeſſer gemein haben, ſo liegt eine Ellipſe, welche dieſen Halbmeſſer und die Linie OM zu Halbaxen hat, auf

beiden Ellipſoiden zugleich, und aus denſelben Gründen gehört eine zweite Ellipſe, deren Halbaxen in o'k' und o' projicirt ſind, den beiden Ellipſoiden gemeinſam an; folglich *ſchneiden ſich dieſe Ellipſoide in zwei Ellipſen* 𝔐..𝔑 und K..L. — Zieht man nun m'ω'n' || m'n' und betrachtet m'n' als V-Projection für einen elliptiſchen Schnitt M..N des zweiten Ellipſoids, ſo ſind, wie ſich leicht zeigen läßt, die Ellipſen 𝔐..𝔑 und M..N *ähnlich* und überdieß ihre Axen parallel; daher müſſen auch ihre Projectionen auf einerlei Grundebene ähnlich ſein; wenn alſo die Projection der einen ein *Kreis* iſt, wird auch die Projection der andern ein Kreis, und zugleich projiciren ſich alle mit 𝔐..𝔑 parallelen Schnitte ſowohl des erſten als des zweiten Ellipſoids nach Kreiſen.

Die H-Projection der Ellipſe 𝔐..𝔑 wird ein Kreis, wenn die H-Projection der Halbaxe O𝔐 die Länge der zweiten Axe (welche ſich auf die HE in wahrer Größe projicirt) erhält. Die Länge dieſer zweiten Axe iſt o'v'. Beſchreibt man daher über m'o' einen Halbkreis, trägt von m' aus die Sehne m'h' = o'v' ein *und legt die HE parallel zu dieſer Sehne*, ſo ſind die H-Projectionen aller Schnitte, welche in den beiden gegebenen Ellipſoiden durch zu m'n' parallele und zur VE ſenkrechte Hülfsebenen hervorgebracht werden, *Kreiſe*, und mittels eines ſolchen Ebenenſyſtems iſt nun die Projection des Schnitts beider Ellipſoide leicht zu finden.

Hätte man den Halbkreis über m'o' auf der entgegengeſetzten Seite dieſer Linie errichtet, ſo würde die HE eine andere Lage erhalten, aber wieder die nämlichen Vortheile gewährt haben. Ferner überzeugt man ſich leicht, daß ſtatt der vorigen (mit der Ellipſe 𝔐..𝔑 parallelen) Hülfsebenen auch eben ſo gut ein mit der Ellipſe K..L paralleles Syſtem in Anwendung gebracht werden kann, und daß es hier abermals zwei verſchiedene Lagen einer HE giebt, auf welche ſich die Schnitte des genannten Syſtems kreisförmig projiciren. Für die Lage des Grundſchnitts hat man alſo die Auswahl unter *vier* verſchiedenen Richtungen.

Digitized by Google

Iſt GG (|| m′h′) der Grundſchnitt, und eine beliebige Parallele uo.. die H-Projection der erſten Drehungsaxe, ſo erhält man für die H-Projection der zweiten Drehungsaxe eine neue Parallele rω.., welche von uo.. um δ abſteht. Die V-Spur für eine Hülfsebene der früher erwähnten Art ſei p′y′ (|| m′n′); dann ſind p′q′, x′y′ die V-Projectionen der Ellipſen, nach denen die gegebenen Flächen geſchnitten werden, und pq, xy die Durchmeſſer der zugehörigen (kreisförmigen) H-Projectionen, folglich (a, a′), (b, b′) zwei Puncte der geſuchten Durchſchnittscurve. *)

Zuſ. Es iſt klar, daß auch für den Fall, wo die Drehungsaxen zweier Ellipſoide ſich ſchneiden, die obige Auflöſung brauchbar wäre und alſo der in §. 374 gelehrten ſubſtituirt werden könnte; doch iſt hier die letztere, als die einfachere, vorzuziehen.

Schnitt zweier Mäntel einer und derſelben Fläche.

§. 377.

Wenn eine krumme Fläche ſich ſelbſt durchſchneidet, ſo kann man die Schnittcurve durch die nämlichen Mittel erhalten, welche bisher für die Schnitte zweier verſchiedener Flächen benützt wurden. Man behandelt die beiden zum Durchſchnitt kommenden Flächenmäntel wie zwei geſonderte Flächen.

§. 378.

Unter diejenigen Flächen, welche ſich ſelbſt ſchneiden, gehört auch die windſchiefe Schraubenfläche, ſobald ſie vollſtändig gedacht wird. Indem man, um die Schnittcurve zu finden, den Flächenmantel über die in Fig. 110 angenommene Grenze hinaus erweitert, bietet ſich zugleich

*) Ändert man die obige Aufgabe dahin ab, daß ſtatt zweier Ellipſoide irgend zwei Drehungsflächen zweiter Ordnung gegeben ſind, ſo bleibt die Art der Auflöſung im Allgemeinen dieſelbe.

Digitized by Google

Gelegenheit, die Fläche ſelbſt noch etwas näher kennen zu lernen.

α.) Man denke ſich die Linie, welche das in §. 264 betrachtete Stück einer Schraubenfläche erzeugte, vorerſt einſeitig verlängert, nämlich von der Axe aus abwärts (gegen die HE zu); dadurch erweitert ſich die Schraubenfläche in der Art, daß ihr Mantel, nach einer Seite in's Unendliche gedehnt, in vielen Windungen um ſich ſelbſt läuft, von denen jede alle vorhergehenden einſchließt. Von dieſer erweiterten Fläche ſoll die H-Spur gezeichnet werden.

Iſt ($aa_1a_2\ldots$, $a'a'a''\ldots$) die leitende Schraubenlinie und (oa, o'a'z') das Dreieck, deſſen verlängerte Hypotenuſe die Fläche erzeugt, ſo entſpringt die H-Spur in o. Bei der Fortbewegung des Dreiecks ſchneidet die Hypotenuſe die HE in immer andern Puncten P_1, P_2, ...; die Entfernungen dieſer Puncte von o wachſen offenbar proportional mit den entſprechenden Erhebungen des Punctes Z über die HE, und da dieſe Erhebungen (nach §. 263, c) ihrerſeits wieder in Proportion mit den Bögen aa_1, aa_2, ... ſtehen, ſo verhalten ſich jene Entfernungen ſelbſt wie die erwähnten Bögen. Die H-Spur der Schraubenfläche wird demnach durch einen Punct P beſchrieben, wenn dieſer ſich auf einer Geraden, welche ſich in der HE um o dreht, von o aus ſo fortbewegt, daß ſein Vorwärtsrücken auf der Geraden dem Drehungswinkel der Geraden proportional bleibt. Eine nach dieſem Geſetze erzeugte Curve heißt eine archimed'ſche Spirale. Fig. 142.

Hiernach läßt ſich die H-Spur der Fläche zeichnen, ohne daß man die V-Projectionen der einzelnen Mantellinien nöthig hat. Man bemerke, daß der Punct (c', C), wo die leitende Schraubenlinie die HE trifft, der Flächenſpur angehören muß, und daß mithin die letztere in C der H-Projection $aa_1a_2\ldots$ der Schraubenlinie begegnet. Während alſo die Linie oa in ihrer Drehung den Winkel aoC durchlaufen hat, iſt der Punct P auf ihr von o aus um die Größe oC = oa vorgerückt. Theilt man demnach den Bogen aC in n gleiche Theile, zieht nach den Theilpuncten

Digitized by Google

Radien $oa_{,,}$ $oa_{,}\ldots$, macht $oP_1 = \frac{1}{n}\,oa$, $oP_2 = \frac{2}{n}\,oa,\ldots$;

$o'P = \frac{n+1}{n}\,oa$, $o''P = \frac{n+2}{n}\,oa,\ldots$, ſo ſind $P_1, P_2,\ldots, 'P, ''P,\ldots$ Puncte der geſuchten Spur, welche in ihrer Fortſetzung in unendlich vielen Windungen um den Punct o läuft.

Dreht man die Linie oa_1 **rückwärts** gegen oa zu, ſo muß ſich der Punct P_1 immer mehr dem Puncte o nähern, fällt aber mit dieſem erſt dann zuſammen, wenn oa_1 in oa gefallen iſt. Daher iſt oa eine **Tangente** der Spirale.

Fig. 142. β.) Verlängert man die Erzeugende der Schraubenfläche auch **aufwärts** und läßt das Dreieck OAZ ſich **abwärts** bewegen, ſo ſetzt ſich die H-Spur der Fläche von o aus durch die Puncte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2,\ldots$ fort, und bildet einen zweiten Zweig der Spirale, von welchem ſich leicht zeigen läßt, daß er dem erſten völlig congruent ſein muß.

Rückt man die HE beliebig auf- oder abwärts, ſo wird man als Schnitt immer dieſelbe Spirale erhalten, nur in andern Lagen.

Fig. 110. γ.) Bei der nur einſeitigen Verlängerung der Mantellinien nach unten muß ſich der verticale Umriß der Fläche eben ſo in's Unendliche erſtrecken wie die Fläche ſelbſt. Der erſte in Fig. 110 dargeſtellte Bogen U^I dieſes Umriſſes, welcher dort in der Nähe des Punctes a′ abbricht, ſetzt ſich ohne Ende fort, und zwar ſo, daß die verlängerte z′a′ eine **Aſymptote** desſelben iſt; denn da die V-Projection jeder Mantellinie eine Tangente des Umriſſes iſt, deren Berührungspunct deſto entfernter liegt, je größer ihre Neigung gegen o′o″ iſt, die z′a′ aber unter allen dieſen Tangenten den größten Winkel gegen o′o″ bildet, ſo iſt ſie die **Grenze** aller Tangenten, alſo die Tangente für den unendlich fernen Punct, oder eine Aſymptote.

Ähnliches gilt von allen übrigen Bögen des Umriſſes.

Fig. 110. δ.) Da in o′o″ auch die V-Projection einer Mantellinie fällt, ſo muß der vorhin betrachtete Bogen U^I des verticalen Umriſſes die o′o″ berühren. Der Berührungs-

Digitized by Google

punct iſt in Fig. 110 der Endpunct der Curve; werden aber die Mantellinien auch **aufwärts** verlängert, ſo wendet ſich jene Curve wieder von o′o″ ab, um einen zweiten Zweig zu bilden, von welchem leicht einzuſehen iſt, daß er dem erſten Zweig congruent ſein und zur Aſymptote die V-Projection v′x′ derjenigen Mantellinie haben muß, deren H-Projection in die Verlängerung von AO fällt. Dieſe Linie v′x′ iſt aber zugleich auch eine Aſymptote für den auf der entgegengeſetzten Seite der o′o″ liegenden unendlichen Bogen U^{II} des verticalen Umriſſes.

In dieſer Art überzeugt man ſich, daß der vollſtändige V-Umriß der Schraubenfläche aus unendlich vielen Äſten beſteht, welche die o′o″ abwechſelnd von der linken und von der rechten Seite her berühren; jeder ſolche Aſt hat zwei Aſymptoten; jede von dieſen Aſymptoten iſt aber zweien Äſten gemeinſchaftlich, welche nach entgegengeſetzten Seiten concav ſind; ſämmtliche Aſymptoten bilden zwei Syſteme von Parallelen.

i.) Wird die Erzeugende der Schraubenfläche nach beiden Seiten unbegrenzt angenommen, ſo **muß ſich die Fläche ſelbſt durchſchneiden.** Denn ſo wie die Mantellinie (ao.., a′z′..) der in derſelben h-projicirenden Ebene liegenden Mantellinie (vo, v′x′) im Puncte (s′, s) begegnet, ſo muß auch jede andere Mantellinie eine entſprechende ſchneiden, welche mit ihr und mit der Are in einerlei Ebene liegt. Läßt man nun die erweiterte Ebene des Dreiecks OAZ mit allen in ihr liegenden Linien ſich nach dem in §. 263, e ausgeſprochenen Geſetze bewegen, ſo bleibt ſowohl die Linie (ao, a′z′) als die Linie (vo, v′x′) auf der Schraubenfläche, folglich auch ihr Schnittpunct (s, s′), und dieſer Punct beſchreibt alſo die Curve, welche den Selbſtdurchſchnitt der Fläche vorſtellt; dieſe Curve iſt aber nach §. 265 eine **Schraubenlinie**, welche mit der leitenden Schraubenlinie (aa_1a_2..., a′a′a″..) Are und Ganghöhe gemein hat. Fig. 142.

Von den in der verticalen Ebene av.. liegenden Mantellinien ſchneiden ſich noch (ao, a″z″) und (vo.., v′x′..) in (r′, r), (ao.., a″z″..) und (vo, v″x″) in (s″, s), (ao, a‴z‴)

Digitized by Google

und (vo.., v″x″..) in (r″, r), u. ſ. f.; alle dieſe Puncte aber beſchreiben offenbar nur eine und dieſelbe Schraubenlinie, weil die (vo, v′x′) während ihrer Bewegung nach und nach mit allen den genannten Mantellinien zuſammenfällt, und alſo der Punct (s, s′), welcher von (o, x′) immer einerlei Entfernung s′x′ behält, nach und nach in die Lagen (r, r′), (s, s″), (r, r″), ... kommen muß. *)

Dagegen ſchneidet die (ao.., a′z′..) alle mit (vo, v′x′) parallelen Mantellinien in Puncten, denen verſchiedene Schraubenlinien entſprechen; woraus man ſieht, daß die endlos erweiterte Schraubenfläche ſich in unendlich vielen Schraubenlinien durchſchneidet, welche aber ſämmtlich in der Ganghöhe und der Lage der Axe übereinſtimmen.

Will man eine ſolche Schraubenlinie, etwa die innerſte, zeichnen, ſo projicirt man beliebig oft zwei Mantellinien, welche eine gemeinſchaftliche H-Projection haben, bemerkt den Schnittpunct für jedes Paar, und verbindet dieſe Schnittpuncte. Auf dieſe Art iſt die Fig. 143 hergeſtellt, wobei man, zu leichterer Überſicht, den h-projicirenden Cylinder der leitenden Schraubenlinie als Grenze für die Schraubenfläche angenommen hat.

§. 379.

Aufg. Der Mittelpunct einer Kugel von conſtantem Halbmeſſer bewegt ſich in einer Kreis-Evolvente. Man ſoll die Umhüllungs-

*) Die Linie, welche die Schraubenfläche beſchreibt, ſchneidet alſo eine Schraubenlinie zweimal und begegnet zugleich der Axe dieſer Schraubenlinie; hierin iſt abermals eine neue Erzeugungsart der Fläche gegeben. Da ferner die erzeugende Linie, beiderſeits von der Schraubenlinie begrenzt gedacht, während ihrer Bewegung von conſtanter Länge bleibt, ſo erſcheint die Schraubenfläche als ein beſonderer Fall der in §. 262, 3 angeführten Fläche (wenn man dort von der willkührlichen Beſchränkung abſieht, daß die Erzeugende kleiner als die Ganghöhe ſein ſoll).

Digitized by Google

fläche dieſer Kugel darſtellen und den Selbſt-durchſchnitt der Fläche zeichnen.

Auflöſung.

α.) Es ſei Q_0aR_0.. ein in der HE liegender Kreis und oaa... ſeine Evolvente. Die Umhüllungsfläche der mit ihrem Mittelpuncte in der Evolvente fortſchreitenden Kugel iſt eine Röhrenfläche (§. 242) und ihre Characteriſtik ein größter Kreis, welcher ſich auf die HE als eine Normale der leitenden Evolvente projicirt, weil ſeine Ebene normal auf der Evolvente ſteht. Die H-Projection für eine Lage desſelben ſei QR (wobei oQ = oR = dem Kugelhalbmeſſer). Man kann dieſen Kreis als die Erzeugende der Röhrenfläche betrachten und die Kugel ſelbſt außer Acht laſſen. Da jede Normale der Evolvente den Kreis Q_0aR_0.. berührt (§. 186), ſo wird die (erweiterte) h-projicirende Ebene des Erzeugungs-kreiſes in jeder Lage einen verticalen Cylinder C berühren, deſſen H-Spur der Kreis Q_0aR_0 .. iſt, und das Entſtehungs-geſetz der Röhrenfläche läßt ſich alſo auch dahin ausſprechen, daß ſie durch einen Kreis erzeugt wird, deſſen erweiterte Ebene ſich, ohne zu gleiten, um einen Drehungscylinder wälzt, oder (was im Weſentlichen dasſelbe iſt) ſich um einen ſolchen Cylinder aufwickelt. Dabei wird nicht nur der Mittelpunct o des Kreiſes, ſondern auch jeder Punct der Peripherie eine Evolvente beſchreiben; alle dieſe Evolventen liegen in paral-lelen Ebenen, welche den Cylinder C ſenkrecht zu ſeinen Mantellinien ſchneiden, und gehören gleichen Kreiſen an; ihre Projectionen auf die angenommene HE ſind alſo unter ſich congruent und unterſcheiden ſich nur hinſichtlich ihres Urſprungs. Fig. 144.

Die beiden in die HE fallenden Puncte Q, R des Er-zeugungskreiſes beſchreiben zwei Evolventen, welche die H-Spur (und zugleich den horizontalen Umriß) der Fläche vorſtellen und in den Puncten Q_0, R_0 des Kreiſes Q_0aR_0 .. ent-ſpringen. Aus dem Umſtande, daß die eine dieſer Evol-venten die andere durchſchneidet, läßt ſich ſchon ſchließen, daß die Röhrenfläche ſich ſelbſt durchſchneiden müſſe.

Digitized by Google

Während der Bewegung des erzeugenden Kreiſes (von der Lage QOR aus beginnend) können ſich zwei unendlich nahe Lagen des Durchmeſſers QR ſo lange nicht ſchneiden, als der Punct R den Punct R_0 nicht erreicht hat; vielmehr ſchneiden ſich erſt die Verlängerungen dieſer Lagen, und zwar auf dem Kreiſe Q_0aR_0.., welcher die Umhüllungslinie aller (verlängerten) Lagen abgiebt *). Iſt aber QR in die Lage Q_0R_0 gekommen, ſo wird ſie von der folgenden (unendlich nahen) Lage in einem Puncte geſchnitten, welcher nicht auf ihre Verlängerung, ſondern zwiſchen ihre Grenzpuncte fällt und dem Kreisbogen R_0aQ_0 angehört. Dieß wiederholt ſich ſo lange, bis die QR in die Lage $Q_0\mathfrak{R}_0$ tritt, von wo aus wieder erſt die Verlängerungen zum Durchſchnitte kommen. So wie nun die aufeinanderfolgenden H-Projectionen des Erzeugungskreiſes ſich in Puncten ſchneiden, deren Geſammtheit den Bogen R_0aQ_0 bildet, ſo müſſen die Lagen des Kreiſes ſelbſt ſich in ihrer ſtetigen Aufeinanderfolge paarweiſe ſchneiden und dadurch eine Curve C zum Vorſchein bringen, welche ſich in jenen Bogen R_0aQ_0 projicirt, und zwar ſo, daß jeder Punct des Bogens die Projection zweier Puncte von C iſt. Dieſe Curve bildet eine Rückkehrcurve für die Röhrenfläche (§. 241, †) und kann nichts anders als der um den Cylinder C gebogene Erzeugungskreis ſein. Die unendlich vielen durch die verſchiedenen Puncte des Erzeugungskreiſes beſchriebenen Evolventen haben ſämmtlich ihre Rückkehrpuncte auf dieſer Rückkehrcurve. In derſelben ſtoßen zwei Mäntel der Röhrenfläche zuſammen, ſo daß von jeder der ebengenannten Evolventen der eine Zweig dem einen Mantel, der andere Zweig dem andern Mantel angehört. Beide Mäntel berühren ſich in allen Puncten der Rückkehrcurve; denn beſtimmt man die Berührungsebene für einen ſolchen Punct mittels der durch ihn gehenden Tangenten an der Rückkehrcurve und an der in ihm entſpringenden Evolvente, ſo berührt die letztere Tangente beide Mäntel (weil die beiden Evolventenzweige ſich ſelbſt im Ur-

*) Vgl. das zweite Beiſpiel zu §. 187.

Digitized by Google

ſprunge berühren) und eben ſo die erſtere (weil die Rückkehrcurve beiden Mänteln zugleich zugehört); folglich iſt die Ebene beider Tangenten ebenfalls beiden Mänteln als Berührungsebene gemeinſchaftlich.

β.) Um den Selbſtdurchſchnitt der Röhrenfläche zu erhalten, denke man ſie durch eine Reihe horizontaler Ebenen geſchnitten, und ſuche die Puncte, welche je zwei in eine ſolche Ebene fallende Evolventen gemein haben. Macht man den Anfang mit der horizontalen Grundebene, ſo zeigt ſich, daß die in Q_o entſpringende Evolvente ſich ſelbſt im Puncte 𝔔 ſchneidet und von der in R_o entſpringenden Evolvente in den Puncten 𝔖, S, Σ geſchnitten wird; zugleich ſchneidet die letztere ſich ſelbſt in ℜ; die fünf Puncte 𝔔, ℜ, 𝔖, S, Σ gehören alſo dem Selbſtdurchſchnitt an. In der Umklappung $QV_{,}R$.. des Erzeugungskreiſes ſind die Endpuncte $V_{,}$, $W_{,}$ einer beliebigen mit QR parallelen Sehne die Umklappungen zweier Puncte V, W, welche nach Wiederaufrichtung des Kreiſes gleiche Höhe über der HE einnehmen, folglich zwei Evolventen beſchreiben, welche in einerlei Ebene liegen und ſich ſchneiden; die H-Projectionen dieſer Evolventen gehen durch die Projectionen v, w der Puncte V, W, und ihre Urſprünge v_o, w_o erhält man, wenn man arc. av_o = arc. aw_o = ov = ow macht; die nämlichen H-Projectionen paſſen zugleich noch für zwei andere Evolventen, welche von den in $V_{,,}$ und $W_{,,}$ umgeklappten Puncten beſchrieben werden; nach Zeichnung dieſer Evolventen geben ihre gegenſeitigen Schnitte die Puncte 𝔳, 𝔴, 𝔵, x, ξ, deren jeder die H-Projection von zwei Puncten des geſuchten Selbſtdurchſchnitts der Fläche iſt. Indem man die Lage der mit QR parallelen Sehne VW ändert, findet man noch beliebig viele Puncte. — Die beiden in o projicirten und in $O_{,}$, $O_{,,}$ umgeklappten Puncte (der höchſte und der tiefſte) des Erzeugungskreiſes beſchreiben zwei Evolventen, deren gemeinſchaftliche Projection oaa... iſt; der Punct a, wo die beiden Zweige der letztern ſich begegnen, iſt alſo ebenfalls die Projection zweier Puncte des geſuchten Durchſchnitts.

Die beiden Zweige der Evolvente oaa... liegen in Be-

Digitized by Google

ziehung auf den Durchmeſſer am.. des Kreiſes $Q_o aR_o$.. *ſymmetriſch* und ſchneiden ſich daher auf der Richtung dieſes (verlängerten) Durchmeſſers. Da ferner (in welcher Entfernung von QR man auch die parallele Sehne $V_x W_x$ annehmen mag, und ſelbſt wenn man ſie mit QR zuſammenfallen läßt) immer $ov = ow$ und alſo arc. av_o = arc. aw_o, ſo liegen auch die beiden Evolventen $vv_o\mathfrak{v}$..., $ww_o\mathfrak{w}$... ſymmetriſch in Beziehung auf die Gerade am...; die Puncte $\mathfrak{x}$, x, ξ, in denen die eine die andere ſchneidet, liegen demnach ebenfalls auf der Richtung von am. Hieraus folgt, daß *zwei Zweige des Selbſtdurchſchnitts ſich als gerade Linien aS, SΣ projiciren*, deren gemeinſchaftliche Richtung durch den Mittelpunct des Kreiſes $Q_o aR_o$.. und den Urſprung der leitenden Evolvente geht.

So wie a auf der Verlängerung des Halbmeſſers am, ſo liegt $\mathfrak{Q}$ auf der Verlängerung von $Q_o m$, $\mathfrak{R}$ auf $R_o m$..., $\mathfrak{v}$ auf $v_o m$..., $\mathfrak{w}$ auf $w_o m$...; wegen der Congruenz aller Evolventen des Kreiſes $Q_o aR_o$.. iſt

$$a\mathfrak{a} = Q_o\mathfrak{Q} = R_o\mathfrak{R} = v_o\mathfrak{v} = w_o\mathfrak{w},$$

daher auch $m\mathfrak{a} = m\mathfrak{Q} = m\mathfrak{R} = m\mathfrak{v} = m\mathfrak{w}$; folglich liegen die Puncte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ um m im Kreiſe, oder *ein dritter Zweig des Durchſchnitts projicirt ſich als ein Kreisbogen*, welcher mit dem Bogen $Q_o aR_o$ concentriſch liegt und den gleichen Centriwinkel umſpannt ($\angle \mathfrak{Q}m\mathfrak{R} = \angle Q_o mR_o$).

Wird die Evolvente $o\mathfrak{a}a$..., und mit ihr die Röhrenfläche ſelbſt, nach beiden Seiten weiter fortgeſetzt als ſie in Fig. 144 gezeichnet iſt, ſo ergeben ſich wiederholte Durchſchnitte; jeder ſolche neue Durchſchnitt bildet wieder zwei Zweige, von denen der eine ſich als Gerade (in der Richtung von $m\mathfrak{a}$..) und der andere als Kreisbogen (concentriſch mit $Q_o aR_o$ und vom nämlichen Centriwinkel) projicirt.

γ.) Auf einer beliebig gewählten VE ſind die Projectionen für die Rückkehrcurve und die verſchiedenen Zweige des Selbſtſchnittes leicht auszuführen, da die H-Diſtanzen der einzelnen Curvenpuncte aus der Umklappung $QV_x R$.. des Erzeugungskreiſes zu entnehmen ſind; es iſt nämlich

O,o die H-Diſtanz der vier Puncte, welche paarweiſe in a und a projicirt ſind, und V,v die H-Diſtanz der 14 Puncte, welche paarweiſe in v_0, w_0, x, r, ξ, v, w projicirt ſind (und von denen die zwei erſten Paare zur Rückkehrcurve, die übrigen zum Selbſtſchnitt gehören). — Am beſten thut man, die genannten Curven auf eine zu ma ſenkrechte VE und auf eine SE zu projiciren.

§. 380.

Die *entwickelbare Schraubenfläche*, unbegrenzt gedacht, hat als H-Spur eine endloſe Kreisevolvente. Das mehrmalige Begegnen der beiden Evolventenzweige deutet auf einen Selbſtdurchſchnitt der Fläche.

Man denke ſich die Schraubenlinie, welche die Rück- Fig. 102.
kehrcurve der Fläche abgiebt, vorläufig nicht weiter nach oben fortgeſetzt als in Fig. 102, wohl aber nach unten (unter die HE hinab) durch *einen* Umgang. Dadurch erweitert ſich die Schraubenfläche ſelbſt ſo, daß XWPAZy ihre Spur wird (vgl. 247, Anmerk.), und der Punct Z, welchen die beiden Zweige AKX und Avy gemein haben, gehört zum Selbſtſchnitt der Fläche. — Da kein Punct der Schraubenlinie (Abc.., a′b′c′..) vor einem andern etwas voraus hat, vielmehr die Schraubenlinie an allen Puncten immer von derſelben Natur iſt, ſo iſt klar, daß bei einem parallelen Verrücken der HE immer wieder eine Evolvente als H-Spur der Fläche zum Vorſchein kommen müßte, oder daß alle zur HE parallelen Schnitte Evolventen ſind, deren H-Projectionen der Spur XPAvy congruent ſein werden, aber in immer andern Puncten des Kreiſes Abc.. entſpringen. Der Schnitt beider Zweige einer ſolchen Evolvente gehört eben ſo wie der Punct Z dem Selbſtdurchſchnitt der Fläche an. Läßt man nun den Kreis Abc.. ſammt der mit ihm feſt verbundenen Evolvente ſich *in ſich ſelber drehen*, ſo fällt die letztere nach und nach mit den Projectionen aller möglichen horizontalen Flächenſchnitte zuſammen; der Punct Z beſchreibt dabei um o einen *Kreis*, welcher offenbar die H-Projection für den Selbſtdurchſchnitt der Fläche vorſtellt;

Digitized by Google

eine auf der Fläche liegende Curve aber, welche ſich als Kreis h-projicirt, iſt (nach §. 248) eine Schraubenlinie von gleicher Axe und Ganghöhe mit der Rückkehrcurve.

Bei noch weiterer Fortſetzung der Schraubenfläche begegnen ſich die beiden Zweige jeder durch einen horizontalen Schnitt erhaltenen Evolvente in noch mehreren Puncten, und wenn man wieder, wie vorhin, die (über X und y endlos fortgeſetzte) Evolvente A... nach und nach die H-Projectionen aller horizontalen Schnitte durchlaufen läßt, ſo beſchreibt außer dem Puncte Z auch jeder andere Doppelpunct einen Kreis um o. Hieraus wird klar, daß der Selbſtdurchſchnitt der unbegrenzten Schraubenfläche aus unendlich vielen Schraubenlinien beſteht, welche unter ſich und mit der Rückkehrcurve concentriſch liegen und die Ganghöhe der letztern haben.

Digitized by Google

Anhang.

Digitized by Google

Digitized by Google

Die Beweiſe für diejenigen einzelnen Lehrſätze, welche an früheren Stellen gelegenheitlich ohne nähere Begründung angeführt wurden, erfordern zum Theil mehr mathematiſche Kenntniſſe als im Buche ſelbſt vorausgeſetzt oder entwickelt ſind, und finden ſich deshalb hier anhangsweiſe zuſammengeſtellt. — Zugleich bietet dieſer Anhang eine ſchickliche Gelegenheit, noch die ſtereographiſche Projection zu berühren, welche wegen ihrer Anwendung für Kartenzeichnung von Wichtigkeit iſt.

I.

Lehrſ. Schneidet die Erzeugende g einer Regelfläche F ſtets drei feſte Gerade, ſo wird eine von dieſen feſten Geraden, wenn ſie ſich ſo in Bewegung ſetzt, daß ſie ſtets drei beliebige, als feſt angenommene Lagen der g ſchneidet, wieder die nämliche Fläche F erzeugen.

Bew. Es ſeien A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 die drei feſten Geraden, A_1A_2, B_1B_2, X_1X_2 drei beliebige Lagen der Erzeugenden g. Die Ebene der beiden Linien A_1B_1, B_1B_2 ſchneidet die Ebene der Linien A_1A_2, B_2A_2 in der Geraden A_1B_2O; die Linien X_1X_2 und A_3B_3 liegen, da ſie ſich ſchneiden, in einer dritten Ebene, und dieſe ſchneidet die vorigen nach den Geraden X_1B_3.., A_3X_2.., welche verlängert auf A_1B_2O zuſammentreffen müſſen (§. 2, V). Fig. 145.

Nun iſt im Dreieck $A_1B_2B_1$

$$A_1X_1 . B_1B_3 . B_2O = A_1O . B_2B_3 . B_1X_1$$ *)

---

*) Für den Beweis des Hauptſatzes werden nur elementare Kenntniſſe vorausgeſetzt; deshalb folgt für den eben benützten Hülfs-

Digitized by Google

und im Dreieck $A_1B_2A_2$

$$A_1O \cdot B_2X_2 \cdot A_2A_3 = A_1A_3 \cdot A_2X_2 \cdot B_2O;$$

folglich (wie die Multiplication beider Gleichungen zeigt) in dem windſchiefen Viereck $A_1A_2B_2B_1$

$$A_1X_1 \cdot B_1B_3 \cdot B_2X_2 \cdot A_2A_3 = A_1A_3 \cdot A_2X_2 \cdot B_2B_3 \cdot B_1X_1$$

oder $$\frac{A_1X_1}{B_1X_1} \cdot \frac{B_2X_2}{A_2X_2} = \frac{A_1A_3}{A_2A_3} \cdot \frac{B_2B_3}{B_1B_3} \quad \ldots (G)$$

Hält man nun die Linien A_1A_2 und B_1B_2 feſt, während die X_1X_2 ſich über die drei feſten Linien A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 fortbewegt, ſo ändern ſich fortwährend die vier Stücke A_1X_1, B_1X_1, A_2X_2, B_2X_2, aber das Product $\frac{A_1X_1}{B_1X_1} \cdot \frac{B_2X_2}{A_2X_2}$ bleibt conſtant, weil es für alle Lagen der X_1X_2 dem conſtanten Producte $\frac{A_1A_3}{A_2A_3} \cdot \frac{B_2B_3}{B_1B_3}$ gleich iſt, deſſen Werth durch c bezeichnet ſein mag; man kann daher umgekehrt ſchließen, daß irgend eine Linie X_1X_2, welche die Seiten A_1B_1, A_2B_2 des windſchiefen Vierecks $A_1B_1B_2A_2$ nach der Bedingung $\frac{A_1X_1}{B_1X_1} \cdot \frac{B_2X_2}{A_2A_2} = c$ ſchneidet, auch der Linie A_3B_3 begegnen und alſo eine Lage für die Erzeugende g der Fläche F ſein müſſe.

Fixirt man hierauf auch die X_1X_2 in irgend einer Lage, und ändert dafür die Lage der A_3B_3 ſo, daß ſie wieder die drei Geraden A_1A_2, B_1B_2, X_1X_2 ſchneidet, ſo wird der

---

ſatz, welcher in den Lehrbüchern der Elementargeometrie nicht immer aufgenommen iſt, hier ein Zwiſchenbeweis.

Man ziehe (Fig. 146) $B_1Q \parallel X_1O$, bis ſie die verlängerte A_1B_2 in Q ſchneidet; dann iſt

$$B_1X_1 : X_1A_1 = QO : OA_1$$
$$B_2B_3 : B_3B_1 = B_2O : QO$$

folglich $B_1X_1 \cdot B_2B_3 : A_1X_1 \cdot B_1B_3 = B_2O : A_1O$

oder $A_1X_1 \cdot B_1B_3 \cdot B_2O = A_1O \cdot B_2B_3 \cdot B_1X_1$.

Punct O eine andere Lage erhalten, aber die Gleichung (G) behält ihre Geltung. Umgekehrt: jede Linie A_3B_3, welche die Seiten A_1A_2 und B_1B_2 des windſchiefen Vierecks $A_1A_2B_2B_1$ nach der Bedingung $\frac{A_1A_3}{A_2A_3} \cdot \frac{B_2B_3}{B_1B_3} = c$ ſchneidet, begegnet der Linie X_1X_2, d. h. **irgend** einer Linie, welche die Seiten A_1B_1 und A_2B_2 nach der Bedingung $\frac{A_1X_1}{B_1X_1} \cdot \frac{B_2X_2}{A_2X_2} = c$ ſchneidet, folglich **allen** ſolchen Linien.

Wenn alſo die Linie A_3B_3 ſich über drei beliebige Lagen der g fortbewegt, ſo ſchneidet ſie in jeder Lage zugleich alle möglichen andern Lagen der g, und liegt alſo ſtets ganz auf der durch die g erzeugten Fläche F, oder die von A_3B_3 erzeugte Fläche iſt mit F identiſch.

†.) Sind die urſprünglichen Leitenden A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 parallel mit einer Ebene (ſo daß man durch dieſelben drei unter ſich parallele Ebenen legen kann), ſo iſt bekanntlich

$$A_1A_3 : A_2A_3 = B_1B_3 : B_2B_3$$

oder

$$\frac{A_1A_3}{A_2A_3} \cdot \frac{B_2B_3}{B_1B_3} = 1$$

alſo auch

$$\frac{A_1X_1}{B_1X_1} \cdot \frac{B_2X_2}{A_2X_2} = 1$$

oder

$$A_1X_1 : B_1X_1 = A_2X_2 : B_2X_2$$

d. h. es ſind dann auch je drei Lagen der Erzeugenden — und folglich alle möglichen Lagen — parallel mit einer und derſelben Ebene.

II.

1.) **Lehrſ. Ein Kegel, welcher einer Fläche zweiter Ordnung umſchrieben wird, berührt dieſe immer in einer Linie zweiter Ordnung, deren Ebene dem nach der Kegelſpitze gerichteten Durchmeſſer der Fläche zugeordnet iſt.**

Digitized by Google

Bew. Die Kegelſpitze heiße P, und der (verlängert) durch ſie gehende Durchmeſſer treffe die Fläche in den Puncten S_1, S_2. Eine durch PS_1S_2 beliebig gelegte Ebene ε ſchneidet die Fläche nach einer Linie zweiter Ordnung, für welche S_1S_2 ebenfalls ein Durchmeſſer iſt. Werden an dieſe Curve von P aus zwei Tangenten gezogen, ſo iſt die Verbindungslinie TT ihrer Berührungspuncte dem Durchmeſſer PS_1S_2 zugeordnet und ſchneidet letzteren in einem Puncte Q, welcher mit S_1, S_2 und P harmoniſch liegt. Da man nun zu drei Puncten nur einen vierten als harmoniſchen finden kann, ſo ſieht man, daß für alle möglichen Lagen der Ebene ε die Linie TT immer durch denſelben Punct Q des Durchmeſſers S_1S_2 geht. Da ferner die (zu S_1S_2 geordneten) Tangenten, welche an die verſchiedenen Schnitte der Ebene ε durch S_1 gelegt werden, auch Tangenten für die Fläche ſelbſt ſind, mithin in einer Ebene liegen, ſo ſind alle möglichen Lagen der TT parallel mit dieſer Ebene. Dreht ſich daher die Schnittebene ε ſtetig um PS_1S_2, ſo dreht ſich die Sehne TT um einen feſten Punct Q und bleibt parallel mit der zu S_1S_2 geordneten Berührungsebene der Fläche; ſie beſchreibt alſo ſelbſt eine Ebene, welche mit jener Berührungsebene parallel oder dem Durchmeſſer S_1S_2 zugeordnet iſt; die Berührungspuncte T aller aus P an die Fläche gezogenen Tangenten liegen mithin in einer ebenen Curve, und eine ſolche kann nur von der zweiten Ordnung ſein.

Dieſer Beweis gilt auch noch, wenn der Punct S_2 in unendliche Entfernung fällt (bei den Paraboloiden); denn es iſt dann $PS_1 = S_1Q$, alſo die Lage von Q wieder conſtant.

Bei den Hyperboloiden aber kann es geſchehen, daß der durch P gehende Durchmeſſer ein imaginärer iſt, alſo die Puncte S_1 und S_2 gar nicht exiſtiren, und für dieſen Fall paßt der obige Beweis nicht mehr.

Ein anderer Beweis, welcher auch den eben erwähnten Fall umfaßt, geht von dem Satze aus, daß durch je zwei parallele Schnitte einer Fläche zweiter Ordnung immer (wegen der Ähnlichkeit und ähnlichen Lage der Schnittcurven) ein Kegel gelegt werden kann, deſſen Spitze in den

durch die Mittelpuncte beider Schnitte gehenden und alſo den Schnittebenen zugeordneten Durchmeſſer trifft. Durch unendliches Nähern der parallelen Schnitte geht dieſer Kegel in einen Berührungskegel über (wobei ſich — in erweiterter Geltung — ganz dieſelbe Betrachtung wiederholt, welche in §. 290 unter der beſondern Vorausſetzung angeſtellt wurde, daß die Schnittebenen ſenkrecht zu einer Are der Fläche ſeien); für ein Syſtem von unendlich vielen unendlich nahen Parallelſchnitten ergeben ſich unendlich viele ſolche Berührungskegel, deren Spitzen, in ihrer Geſammtheit gedacht, den zu dieſem Syſteme geordneten Durchmeſſer bilden; daher läßt ſich umgekehrt ſchließen, daß irgend ein Kegel, welcher aus einem Puncte des Durchmeſſers um die Fläche beſchrieben iſt, dieſe in einer dem Durchmeſſer zugeordneten ebenen Curve berühren muß.

2.) Lehrſ. Jeder um eine Fläche zweiter Ordnung beſchriebene Cylinder berührt dieſelbe in einer Linie zweiter Ordnung, deren Ebene dem mit den Cylindermantellinien parallelen Durchmeſſer D als Diametralebene zugeordnet iſt.

Bew. Die dem Durchmeſſer D zugeordnete Diametralebene E ſchneidet die Fläche zweiter Ordnung nach einer Linie zweiter Ordnung. Zieht man durch alle möglichen Puncte dieſer Curve Parallelen zu D, ſo müſſen dieſe Parallelen ſämmtlich Tangenten der Fläche ſein und alſo den fraglichen umſchriebenen Cylinder bilden; denn wären die genannten Parallelen keine Tangenten, ſo müßte jede mit der Fläche noch einen zweiten Punct gemein haben; von jeder fiele alſo ein Stück als Sehne in die Fläche, und die Anfangspuncte aller dieſer Sehnen lägen in der zu ihnen geordneten Ebene E, was nicht möglich iſt, weil die Ebene E jede mit D parallele Sehne halbiren muß.

Bei den Paraboloiden iſt der Durchmeſſer D nicht wirklich vorhanden (er liegt ganz in unendlicher Entfernung). Der obige Beweis gilt aber auch hier, wenn man durch D nicht den Durchmeſſer, ſondern irgend eine Sehne des Para-

Digitized by Google

boloids bezeichnet, welche mit der Richtungslinie des Cylinders parallel iſt.

Der gegenwärtige Lehrſatz (2) kann als beſonderer Fall des vorigen (1) angeſehen werden, wenn man die Spitze P eines umſchriebenen Kegels in unendliche Entfernung rückt. Iſt der Durchmeſſer D (S_1S_2) reell, ſo gilt der für (1) gegebene Beweis mit geringen Abänderungen auch für (2); der dort mit Q bezeichnete Punct rückt dann in die Mitte zwiſchen die Scheitel S_1 und S_2 des Durchmeſſers D.

Anmerk. Iſt (in 1. oder 2.) die gegebene Fläche zweiter Ordnung ſelbſt ein Kegel oder Cylinder, ſo geht die umſchriebene Fläche in zwei Berührungsebenen, und die Berührungscurve in ein Paar Gerader über, welche ſich ſchneiden oder parallel ſind.

III.

Lehrſ. Wird ein Drehungs-Paraboloid durch irgend eine gegen die Drehungsaxe geneigte Ebene geſchnitten, ſo projicirt ſich die Schnittcurve auf eine zur Drehungsaxe ſenkrechte Ebene als ein Kreis.

Bew. Nimmt man (für ein rechtwinkeliges Coordinatenſyſtem) die Drehungsaxe als Axe der z, und verlegt den Scheitel des Paraboloids in den Anfangspunct des Syſtems, ſo iſt die Gleichung des Paraboloids

$$x^2 + y^2 = px \quad . \; . \; . \quad (1)$$

Eine beliebige Ebene E ſchneide das Paraboloid. Dreht man das Coordinatenſyſtem um die Axe der z ſo, daß die Ebene der xz ſenkrecht auf E ſteht (wodurch ſich die obige Gleichung des Paraboloids nicht ändert), ſo entſpricht der Ebene E die Gleichung

$$z = ax + b, \quad . \; . \; . \quad (2)$$

deren Form den Fall ausſchließt, daß E parallel zur Axe der z ſei.

Digitized by Google

Für die Curve, in welcher das Paraboloid und die Ebene E ſich ſchneiden, gelten die Gleichungen (1) und (2) zugleich, und wenn man aus beiden z eliminirt, erhält man für die Projection der Schnittcurve auf der Ebene der xy die Gleichung

$$x^2 + y^2 = p\ (ax + b).$$

Dieß iſt aber die Gleichung eines Kreiſes, deſſen Mittelpunct in der Axe der x liegt.

IV.

Lehrſ. Die Durchſchnittscurve zwiſchen zwei Flächen zweiter Ordnung, welche eine gemeinſchaftliche Hauptebene haben, projicirt ſich auf diese Hauptebene als eine Linie zweiter Ordnung.

Bew. Wählt man die gemeinſchaftliche Hauptebene zur Ebene der xz, ſo kommt y in den Gleichungen beider Flächen nur in der zweiten Potenz vor. Beide Gleichungen laſſen ſich daher ganz allgemein unter den Formen

$$a_1y^2 = b_1x^2 + c_1z^2 + d_1xz + e_1x + f_1z + g_1$$
$$a_2y^2 = b_2x^2 + c_2z^2 + d_2xz + e_2x + f_2z + g_2$$

darſtellen. Die Gleichung für die Curve, welche ſich auf der Ebene der xz als Projection des Flächendurchſchnitts ergiebt, findet man, wenn aus den beiden vorigen Gleichungen y eliminirt wird; dadurch erhält man

$$Mx^2 + Nz^2 + Oxz + Px + Qz + R = 0$$

(wo $R = a_1g_2 - a_2g_1$, $Q = a_1f_2 - a_2f_1$, $P = a_1e_2 - a_2e_1 \ldots$ iſt), und dieſe Gleichung gehört einer Linie zweiter Ordnung an.

V.

1.) Lehrſ. Eine Gerade, welche durch den Schnittpunct zweier feſten Geraden geht und

ſo bewegt wird, daß ihre Winkel gegen dieſe feſten Geraden eine gegebene Summe behalten, erzeugt eine Kegelfläche zweiter Ordnung.

Bew. Man nehme den Schnittpunct der beiden feſten Geraden zum Anfangspuncte, ihre Ebene zur Ebene der xz und die Halbirungslinie ihres Winkels zur Axe der z eines rechtwinkeligen Coordinatenſyſtems. Iſt 2φ der Winkel zwiſchen den feſten Geraden, ſo bildet die eine derſelben gegen die Axen der x, y, z der Reihe nach die Winkel $90° - \varphi$, $90°$, φ; die Winkel der andern gegen die Axen ſind in derſelben Ordnung $90 + \varphi$, $90°$, $-\varphi$. Die dritte (bewegliche) Gerade bilde mit den drei Coordinatenaxen die Winkel α, β, γ, und (x, y, z) ſei ein beliebiger Punct in ihr, ſo daß alſo

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Bezeichnet man die Winkel, welche die dritte Gerade mit der erſten und zweiten einſchließt, durch ξ und ξ', ſo hat man die Gleichungen

$$\cos\xi = \cos\alpha . \cos(90° - \varphi) + \cos\beta . \cos 90° + \cos\gamma . \cos\varphi$$
$$= \cos\alpha . \sin\varphi + \cos\gamma . \cos\varphi$$
$$\cos\xi' = \cos\alpha . \cos(90° + \alpha) + \cos\beta . \cos 90° + \cos\gamma . \cos(-\varphi)$$
$$= -\cos\alpha . \sin\varphi + \cos\gamma . \cos\varphi$$
$$\xi + \xi' = 2\psi,$$

wo 2ψ ein gegebener Winkel von conſtanter Größe iſt.

Durch Addition und Subtraction der beiden erſten Gleichungen (und mit Berückſichtigung bekannter trigonometriſcher Relationen) erhält man

$$2\cos\gamma\cos\varphi = \cos\xi + \cos\xi' = 2\cos\left(\frac{\xi' - \xi}{2}\right)\cos\left(\frac{\xi' - \xi}{2}\right)$$

$$2\cos\alpha\sin\varphi = \cos\xi - \cos\xi' = 2\sin\left(\frac{\xi' + \xi}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi' - \xi}{2}\right)$$

Digitized by Google

Dividirt man von dieſen neuen Gleichungen wieder die erſte durch $2\cos\left(\frac{\xi'+\xi}{2}\right) = 2\cos\psi$ und die zweite durch $2\sin\left(\frac{\xi'+\xi}{2}\right) = 2\sin\psi$, quadrirt hierauf beide und addirt, ſo folgt

$$\frac{\cos\gamma^2\ \cos\varphi^2}{\cos\psi^2} + \frac{\cos\alpha^2\ \sin\varphi^2}{\sin\psi^2} = 1$$

oder, wenn man für $\cos\alpha$ und $\cos\gamma$ die oben angegebenen Werthe ſetzt:

$$z^2\cos\varphi^2\sin\psi^2 + x^2\sin\varphi^2\cos\psi^2 = (x^2+y^2+z^2)\sin\psi^2\cos\psi^2,$$

welche Gleichung nach gehöriger Reduction in die folgende übergeht:

$$\frac{x^2}{tg\psi^2} + \frac{y^2}{\frac{\cos\varphi^2}{\cos\psi^2} - 1} = z^2 \ ^{*)}$$

Hiernach liegt der Punct (x, y, z) auf einer Kegelfläche zweiter Ordnung, deren Spitze im Anfangspuncte der Coordinaten liegt, und für welche die drei Coordinatenebenen Hauptebenen ſind. Die Axe der z iſt zugleich Kegelaxe.

Der in die Ebene der xz fallende Hauptſchnitt bildet den Winkel 2ψ. Dem Hauptſchnitte in der Ebene der yz muß ein kleinerer Winkel zukommen; denn bezeichnet man den Werth dieſes Winkels durch 2ω, ſo iſt

$$tg\,\omega^2 = \frac{\cos\varphi^2}{\cos\psi^2} - 1;$$

da aber $\cos\varphi^2 < 1$,

---

*) Da in jedem Dreikant die Summe zweier Seiten größer als die dritte iſt, ſo iſt immer $\xi+\xi' > 2\varphi$ oder $\psi > \varphi$, daher $\frac{\cos\varphi}{\cos\psi} > 1$, und folglich ſind alle Glieder der obigen Gleichung poſitiv.

Digitized by Google

so ist $\cos\varphi^2 - \cos\psi^2 < \sin\psi^2$

und $\frac{\cos\varphi^2}{\cos\psi^2} - 1 < \mathrm{tg}\,\psi^2,$

d. i. $\mathrm{tg}\,\omega < \mathrm{tg}\,\psi$, oder $\omega < \psi$.

2.) Hat man die Gleichung irgend einer gegebenen Kegelfläche auf die Form

$$\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} = z^2$$

gebracht und betrachtet ſie als identiſch mit der vorhin gefundenen Gleichung, ſo iſt $m = \mathrm{tg}\,\psi^2$, $n = \frac{\cos\varphi^2}{\cos\psi^2} - 1$, woraus folgt

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{n+1}{m+1}}$$

Sucht man aus dieſer Gleichung den Winkel φ und zieht durch die Kegelſpitze in der Ebene des größern Hauptſchnittes zwei Gerade, welche zu beiden Seiten der Kegelaxe die Neigung φ gegen letztere haben, ſo hat man zwei Linien von der Eigenſchaft, daß die Winkel, welche ſie mit irgend einer Mantellinie des Kegels bilden, eine conſtante Summe 2ψ geben, welche durch die Gleichung $m = \mathrm{tg}\,\psi$ beſtimmt iſt.

Wäre $m = n$, ſo würde man $\cos\varphi = 1$ oder $\varphi = 0$ erhalten; d. h. iſt die gegebene Kegelfläche durch Drehung entſtanden, ſo fallen die eben erwähnten Geraden beide mit der Drehungsaxe zuſammen.

3.) Nach (1) iſt ein Kegel zweiter Ordnung der geometriſche Ort für die dritte Kante eines Dreikants, von welchem die Lagen zweier Kanten und die Summe der Seiten gegeben ſind. Denkt man ſich um die Spitze dieſes Dreikants eine Kugel beſchrieben, ſo werden die drei Kanten desſelben auf der Kugelfläche durch Puncte repräſentirt, die drei Seiten durch Bögen größter Kreiſe (vgl. §. 103); der Kegel

Digitized by Google

wird alſo auf der Kugel durch eine Curve vertreten, welche der geometriſche Ort für die Spitze eines ſphäriſchen Dreiecks iſt, von welchem die beiden andern Ecken und die Summe der Seiten gegeben ſind. Mit andern Worten: Wird um die Spitze eines Kegels zweiter Ordnung eine Kugel mit beliebigem Halbmeſſer beſchrieben, ſo hat der dadurch erzeugte *ſphäriſche Kegelſchnitt* die Eigenſchaft, daß die Entfernungen eines beliebigen Punctes ſeiner Peripherie von zwei feſten Puncten der Kugel eine conſtante Summe geben. Die feſten Puncte heißen die *ſphäriſchen Brennpuncte*.

Es ſei dieſer Kegelſchnitt auf die Ebene des größern Fig. 147.
Hauptſchnitts $S'CS''$ in $S'pS''$ projicirt, während F' und F'' die ſphäriſchen Brennpuncte ſind. Der obere Mantel des Kegels wird von der Kugel in einem zweiten Aſte geſchnitten, welcher $\mathfrak{S}'p\mathfrak{S}''$ zur Projection *) und $\mathfrak{F}', \mathfrak{F}''$ zu Brennpuncten hat (wobei $C\mathfrak{F}'$ und $C\mathfrak{F}''$ die Verlängerungen von $F'C$ und $F''C$ ſind). Legt man durch den in p projicirten Punct P der Curve und durch die beiden Linien $F'\mathfrak{F}'$, $F''\mathfrak{F}''$ zwei größte Kreiſe, ſo iſt

$$\text{arc. } PF' + \text{arc. } PF'' = \text{arc. } S'S'', \ldots \quad (G)$$

oder, wenn man die halbe Peripherie eines größten Kreiſes durch π bezeichnet:

$$(\pi - \text{arc. } P\mathfrak{F}') + (\pi - \text{arc. } P\mathfrak{F}'') = 2\pi - \text{arc. } S'\mathfrak{S}''S''$$

woraus folgt

$$\text{arc. } P\mathfrak{F}' + \text{arc. } P\mathfrak{F}'' = \text{arc. } S'\mathfrak{S}''S''.$$

Als ſphäriſche Brennpuncte für den Aſt $S'PS''$ der Curve können daher ſtatt der Puncte F', F'' auch die Puncte $\mathfrak{F}', \mathfrak{F}''$ gelten; ſtatt des Bogens $S'S''$ tritt aber dann der Bogen $S'\mathfrak{S}''S''$ ein.

Die Gleichung G läßt ſich ferner umändern in

$$\text{arc. } PF' + (\pi - \text{arc. } P\mathfrak{F}'') = \text{arc. } S''S'\mathfrak{S}'' - \text{arc. } S'\mathfrak{S}''$$
$$= \pi - \text{arc. } S'\mathfrak{S}''$$

oder $\text{arc. } P\mathfrak{F}'' - \text{arc. } PF' = \text{arc. } S'\mathfrak{S}''$,

*) Die beiden Äſte des Kegelſchnitts geben als Projectionen Stücke einer Ellipſe (IV).

Digitized by Google

und eben ſo hat man (wenn P den in p projicirten Punct des Aſts S′..S″ bezeichnet)

arc. PF′ — arc. PF″ = arc. S′S″.

Hieraus folgt, daß beide Äſte zuſammen den geometriſchen Ort eines Punctes vorſtellen, deſſen ſphäriſche Entfernungen von den Puncten F′ und F″ eine conſtante Differenz S′S″ haben. Nach dieſer Anſicht ſind dann F′ und F″ die ſphäriſchen Brennpuncte für den aus zwei Äſten beſtehenden Kegelſchnitt. (Man ſieht übrigens leicht, daß man ebenſowohl die Puncte F″ und F′ dafür annehmen könnte.)

VI.

Stereographiſche Projection.

Wenn eine auf einer Kugel liegende Figur auf eine Ebene ſo projicirt wird, daß die Projectionsſtrahlen vom Endpuncte des auf der Grundebene ſenkrechten Kugeldurchmeſſers ausgehen, ſo führt dieſer beſondere Fall der Centralprojection den Namen **ſtereographiſche Projection.**

In Bezug auf ſolche Projectionen ſind namentlich die beiden folgenden Sätze zu merken.

1.) Die Projection jedes Kreiſes der Kugel, welcher nicht durch das Projectionscentrum geht, iſt wieder ein Kreis;

2.) der Mittelpunct für die Projection eines Kugelkreiſes iſt die Projection der Spitze eines Kegels, welcher der Kugel nach jenem Kreiſe umſchrieben iſt.

Fig. 148. Bew. zu 1., Die Hauptebene des durch einen Kugelkreis gelegten projicirenden Kegels *), welche immer durch den Mittelpunct O der Kugel muß, ſchneidet die Kugel nach dem größten Kreiſe CAB, den zu projicirenden Kreis nach einem Durchmeſſer AB, den Kegel nach den Geraden CAa, CBb (wobei C das Projectionscentrum iſt) und die Grundebene nach der Geraden ab.., ſo daß ab ⊥ OC. Zieht man durch

*) Vgl. Anmerk. auf S. 354.

Digitized by Google

C eine Tangente CT an den Kreis CAB, ſo iſt (nach einem bekannten Satze der Elementargeometrie)
$\angle$ TCb = $\angle$ CAB, oder (da CT || ab) $\angle$ Cba = $\angle$ CAB. Die Grundebene liegt demnach antiparallel zur Ebene des Kreiſes A..B und ſchneidet alſo den projicirenden Kegel nach einem Kreiſe (§ 368, α), deſſen Durchmeſſer ab iſt.

Geht ein Kugelkreis durch C, ſo verwandelt ſich der projicirende Kegel in eine Ebene und die Kreisprojection iſt eine (unbegrenzte) gerade Linie.

Bew. zu 2. Die Ebene aCb geht durch die Spitze des um die Kugel nach dem Kreiſe A..B beſchriebenen Kegels und ſchneidet dieſen Kegel nach zwei Geraden AS, BS, welche den Kreis CAB in A und B berühren. Verlängert man AB bis ſie die Tangente CT in T trifft, ſo iſt T der Pol der Geraden CSs und liegt mithin mit den Puncten A, B, R harmoniſch. Deshalb bilden die vier Geraden CT, CB, CR, CA ein Syſtem harmoniſcher Linien, welches von jeder andern Geraden in vier harmoniſch gelegenen Puncten geſchnitten wird. Da aber ab || CT, ſo fällt für die Schneidende ab.. der vierte Punct in unendliche Entfernung und es iſt as = sb oder s der Mittelpunct der Kreisprojection a..b.

Soll mittels ſtereographiſcher Projection ein Bild der Erdoberfläche auf einer Ebene hergeſtellt werden, ſo bilden ſich im Allgemeinen ſowohl die geographiſchen Parallelkreiſe als die Meridiane in Kreiſen ab. Läßt man dabei die Projectionsſtrahlen von einem der Erdpole ausgehen, ſo projiciren ſich die Parallelkreiſe als concentriſche Kreiſe und die Meridiane als Gerade, welche ſich alle in dem gemeinſchaftlichen Mittelpuncte dieſer Kreiſe ſchneiden.

Vor dem Gebrauche des Buches ſind folgende Druckfehler zu verbeſſern:

Seite 4 Zeile 2 des Satzes XX iſt nach dem Worte „gleich“ einzuſchalten: oder ſie suppliren ſich.

„ 7 „ 8 v. u. iſt nach dem Worte „Alphabets“ der Satz ausgeblieben: und jede ſeiner Projectionen durch denſelben Buchſtaben des kleinen Alphabets.

„ 17 „ 3 v. o. ſtatt P lies P′.

„ 18 „ 6 des §. 37: ſt. $\left\{ \begin{matrix} \mathfrak{V} \\ \mathfrak{H} \end{matrix} \right\}$ l. $\left\{ \begin{matrix} \mathfrak{H} \\ \mathfrak{V} \end{matrix} \right\}$

„ 20 „ 5 v. u. ſt. den l. der.

„ 22 „ 3 v. u. ſt. unterſcheiden l. entſcheiden.

„ 24 „ 6 des §. 48: ſt. P l. T; ſt. P′ l. T′.

„ 50 „ 11 v. o. ſt. $< \varphi \angle$ ASa l. $\angle \varphi <$ ASa.

„ 61 „ 1—3 v. o. iſt zu ſtreichen.

„ 82 „ 14 v. u. ſt. vnw l. v und [illegible].

„ „ „ 10 „ „ ſt. c l. v.

„ „ „ 9 „ „ ſt. Schnittpunct l. Schnittpuncte.

„ 83 „ 6 „ „ ſt. Con- l. Co-

„ „ „ 5 „ „ ſt. a l. α.

„ 92 „ 5 des §. 137 ſt. (Poly-) gons l. -eders.

„ 96 zu §. 142 fehlt auf dem Rande: Fig. 60.

„ 98 „ 11 v. o. ſt. zuſammenfloßen l. zuſammenſtoßen.

„ 102 „ 23 v. o. ſt. U l. D.

„ „ „ 24 „ „ ſt. O l. U.

„ „ „ 25 „ „ ſt. E l. O.

„ „ nach Zeile 25 iſt die Zeile einzuſchalten: P′p + pv „ „ „ „ E.

„ 121 „ 5 v. o. ſtatt Endpuncte l. Eckpuncte.

„ „ „ 6 v. o. ſt. Schriftfigur l. Schnittfigur.

„ 158 „ 4 v. u. ſt. fallende l. fallenden.

„ 160 „ 1 v. o. ſt. β l. β′.

„ 164 „ 13 „ „ ſt. näher die l. näher an die.

„ 171 „ 16 v. u. ſt. Axen l. Halbaxen.

„ 179 „ 13 v. o. ſt. Bruckſtücke l. Bruchſtücke.

„ 185 „ 5 „ „ ſt. congruenten l. ſymmetriſchen.

„ 206 „ 13 v. u. ſt. läuft l. laufen.

„ 210 „ 9 „ „ ſt. Einhüllungsfläche l. Umhüllungsfläche.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS.

Digitized by Google

Seite 235 Zeile 17 v. o. ſt. veringern l. verringern.
" 295 " 14 v. u. ſt. R' l. R_1.
" 307 " 7 " " ſt. $\mathfrak{P}_3 A \mathfrak{Q}_3$ l. $\mathfrak{P}_3 B \mathfrak{Q}_3$.
" 322 " 1 " " ſt. $U_1 P$ l. $U_2 P$.
" 328 " 7 v. o. } ſt. $k'l'$ l. $c'l'$.
" " " 8 " " }
" " " 4 v. u. ſt. (s, s') l. (o, s').
" 332 " 1 " " ſt. m· l. m'.
" " " " " " ſt. $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ l. $\mathfrak{A}\mathfrak{N}$.
" 337 " 8 v. o. } ſt. Schnittcurven l. Schnittcurve.
" " " 19 " " }
" 351 " 1 v. u. ſt. $\mathfrak{S}\mathfrak{W}$ l. $\mathfrak{S}\mathfrak{B}$.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by

Digitized by Google